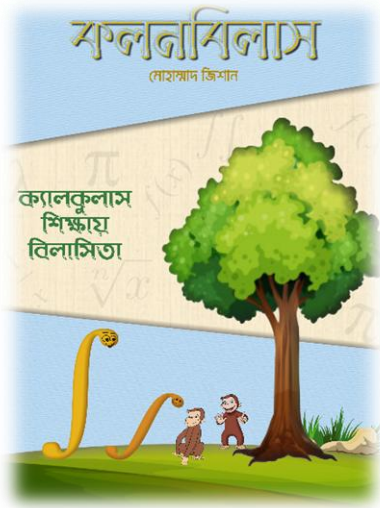
কলনবিলাস

মোহাম্মাদ জিশান

ক্যালকুলাস শিক্ষায় বিলাসিতা



কলনবিলাস

মোহাম্মাদ জিশান

প্রথম প্রকাশঃআগস্ট-২০২০(ইবুক)

সম্পাদনায়ঃ

মাহামুদ-উল হাসান,মোঃ ইশরাক হামিম

প্রচ্ছদঃ

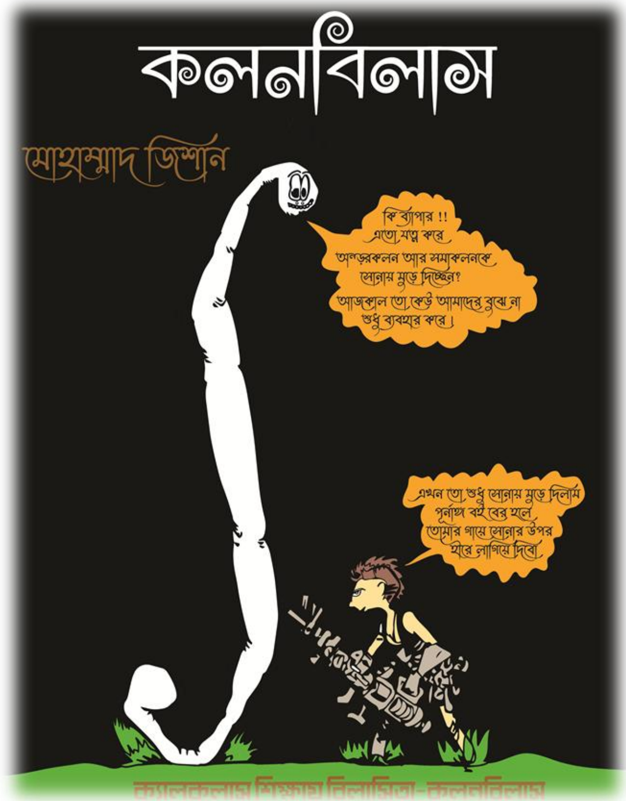
আতিকুজ্জামান আজাদ

অক্ষরবিন্যাসঃ

লেখক

Kolon Bilas

Weitten by Mohammad Zishan



ক্যালকুলাস শব্দটা শোননি এমন উদাহরণ খুব কম পাওয়া যায় আজকাল। ব্যাসিক গণিত ছেড়ে দিয়ে এখন বেশিরভাগ শিক্ষার্থীর আগ্রহের বিষয়ের তালিকা করা হলে সেখানে এই শব্দটা সবার আগে দেখতে পাওয়া যাবে। কিন্তু আগ্রহের ব্যাপার হলেও বয়স নামের একটা প্রভাবক আছে আমাদের জীবনে। ব্যাপারটা হলো এমন - কোনো এক ব্যক্তি তার পুরো জীবদ্দশায় কোনোদিনই বাসমতি চালের ভাত খায়নি। তাহলে তার সামনে যদি চিনিগুড়া চালের সুগন্ধি পোলাও রেখে দিলেই সে তো একপ্রকার পাগল হয়ে যাবে,মনে করবে কি এক রাজকীয় খাবার সে খেতে পেলো। এমন উধাহরন দেওয়ার পেছনে কারণ হলো তোমাদের আমি বুঝাতে চেয়েছি অপক্ক বা দুর্বল ভিত্তি। এইযে একশ্রেণীর কথা বললাম এসব ব্যাপারে খুব আগ্রহী, তাদের ভিত্তি বলতে কিছুই নেই, আর থাকলেও সেটা হিসাব করার মত মজবুদ না। আমি যদি তাদের সামনে ক্যালকুলাস না বলে কলনবিদ্যা বলি, ডিফারেন্সিয়েশন না বলে যোগজীকরণ বলি, ইন্ট্রিগ্রেশন না বলে অন্তরীকরণ বলি তাহলেই দেখবা তেমন থুতুভূতু খেয়ে যাবে। "এগুলো আবার কোন প্রাণীর নাম রে বাবা!" - এমন একটা ভাব দেখতে চাইলে সেই সময় ওদের মুখের দিকে তাকাতে হবে। এটা তো গেলো সীমিত জ্ঞানের বিষয়। আরেক শ্রেণীর জ্ঞানী আছে যার কেবল ক্যালকুলাস নামটার সাথে পরিচিতি। তার সামনে গিয়ে যদি বলো যে তুমি ক্যালকুলাস পারো-সে তো তোমাকে ভবিষ্যৎ গণিতবিদ,নিউটনের বংশধর, লিবনিজের আব্বু সহ আরো অনেক কিছু বানায় ফেলতে পারে। আসলে এই ক্যালকুলাস নামটার মধ্যেই একটা অজ্ঞাত শক্তি লুকায়িত আছে সেটা অগ্রাহ্য করবো না। তবে আমার ব্যক্তিগত মতামত থেকে বলতে পারি ক্যালকুলাস থেকে ত্রিকোণমিতি বেশি বিস্তৃত একটা বিষয়,আর ক্যালকুলাস নিজেও চলার জন্য ত্রিকোণমিতির সাহায্য নিতে বাধ্য। এখন আবার জিজ্ঞেস করে বসো না যে ত্রিকোণমিতি কি! নবম শ্রেণীতে পড়েছে,এমন যে কেউ এই নামটার সাথে পরিচিত। ছোটদের মধ্যেও অনেকে আছো যারা ত্রিকোণমিতির সাথে পরিচিত। তাহলে তুমি যেখানে ত্রিকোণমিতি পারো,সেখানে ক্যালকুলাস তোমার কাছে দৈত্যদানব মনে হলে এটা সত্যি দুঃখজনক। আমি বলছি না যে ত্রিকোণমিতি পারলে ক্যালকুলাস পারতেই হবে। আরো সহজে বললে এই ত্রিকোণমিতি,ক্যালকুলাস সবকিছুই গাণিতিক বাক্য,সমীকরণ সমাধান,যোগ,বিয়োগ,গুন,ভাগ ছাড়া আর বিশেষ কিছুই না। আর এই বিষয়গুলো তো আমরা পঞ্চম শ্রেণীতে মোটামুটি ভালো মতই পড়ে এসেছি। তাহলে ভয় কিসের? আচ্ছা,কোনোদিন প্রশ্ন এসেছে মনে যে এই এলিয়েন টাইপ নামের ক্যালকুলাস আসলে কি? কারো কাছে জিজ্ঞাসা করলে একটা অনেক সাধারণ উত্তর পাওয়া যাবে, "ক্যালকুলাস হলো গণিতের এক অনেক গুরুত্বপূর্ণ শাখা,এটা দিয়ে কোনোকিছু কে যেমন অনেক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র

ভাগ করে সেখান থেকে সূক্ষ্মাতিসূক্ষ্ম এবং নির্ভুল হিসাব করা যায়,ঠিক তেমনি অসীম সংখ্যক সূক্ষ্মাতিসূক্ষ্ম উপাত্ত কে চেপে মন্ড করে একটা উপাত্তে পরিণত করা যায়।" খুব সুপরিচিত সংজ্ঞা টা শোনার পরে মনের মধ্যে নিশ্চয় আগ্রহ সৃষ্টি হচ্ছে! এটা স্বাভাবিক। একটু চিন্তা করেই দেখো না। কোনোকিছু কে যেমন অসীম সংখ্যক অংশে কেটে ফেলা যায়, তেমনই অসীম সংখ্যক ক্ষুদ্র অংশ জোড়া লাগিয়ে একটা পূর্ণ কিছুতে রূপান্তর করা যায়। এটাই হলো ক্যালকুলাস! কিন্তু আমাদের এই সংজ্ঞা শোনার পরে মনে হবে যে কি না কি একটা জিনিস হবে এই ক্যালকুলাস! তবে বলে রাখি এটা মোটেই কঠিন কিছু না। শুধু তোমাদের চিন্তার পরিধি আরেকটু বড় করতে হবে। ক্যালকুলাস নিয়ে পড়াশুনা করার জন্য কি অনেক কিছু জানতে হবে? উত্তর হলো অবশ্যই না। আগেও একবার বললাম এই ব্যাপারটা যোগ,বিয়োগ, গুন,ভাগ ব্যতীত আর কিছুই না। তাহলে ওগুলো ভালোমত করতে পারলেই তুমি ক্যালকুলাস নিয়ে পড়াশুনা করতে পারবে। এই দানবীয় নামের সত্তা ওরফে ক্যালকুলাস মহাশয়কে তোমাদের সামনে একদম সহজ ভাবে উপস্থাপন করার একটা প্রচেষ্টা থেকেই মূলত আমার এই বই লেখা। আশা করি বইটা পড়ে যাদের মনে হতো ক্যালকুলাস কি না কি মহাভারত,তাদের ভুল ভাঙবে। আর তোমাদের মধ্যে যারা এখনো মনে করো ক্যালকুলাস পারলেই নিউটন,লিবনিজ হয়ে যায় কিংবা বিশ্বসেরা গণিতবিদ হয়ে যায়,তারা নিজেদের মতামত পাল্টাবা। তো,চলো শুরু করা যাক!

লেখক পরিচিতি

লেখক পরিচিতি:

মোহাম্মদ জিশান, জন্ম ০৬ জানুয়ারী,২০০২, নাটোরের সিংড়ায়। বাবা মোঃ আব্দুল মান্নান, মা মোছাঃ জুলেখা খাতুন। বর্তমানে তিনি এইচএসসি-২০২০ পরীক্ষার্থী।এসএসসি দিয়েছেন নাটোরের বিয়াম থেকে। আর এইচএসসির জন্য পড়েছেন সিংড়া দমদমা পাইলট স্কুল ও কলেজ থেকে। এখন বাবা, মা, ছোট্ট বোনকে নিয়ে থাকেন নাটোরের সিংড়ায়।

লেখকের আগ্রহের বিষয় বলতে গেলে পদার্থবিজ্ঞান আর গণিত।আর লেখকের উচ্চাঙ্ক্ষা পদার্থবিজ্ঞানের উচ্চতর শাখায় বিচরন করা, ভেদ করা রহস্য। এস এস সি'র পর থেকে কোয়ান্টাম মেকানিক্স,রিলেটিভিটি, ক্যালকুলাস নিয়ে পড়াশুনা। এস এস সি দেয়ার পর কণা পদার্থবিজ্ঞানের বই হাতে নিয়ে রিলেটিভিস্টিক ওয়েভ ইকুয়েশন দেখে খেয়েছেন বিশাল এক ধাক্কা,সেখান থেকে মূলত ক্যালকুলাস শেখার সূত্রপাত।গত অমর একুশে বই মেলায় প্রকাশিত হয়ে গেল লেখকের প্রথম বই "আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব" নিয়ে একটা বইও। তার ভালো লাগে ঘুরে বেড়াতে প্রকৃতিকে উপভোগ করতে,এক বিকেলেই অসীম রোমাঞ্চের খোজে কোনো এক নির্জন জনপদে একা ঝাপ দিতে। গান শোনাও তার একটা শখের মধ্যে পরে, আর কি বলা যায় ? প্রচণ্ড ইমোশনাল একজন মানুষ।

এসএসসির পদার্থবিজ্ঞান পরীক্ষায় প্রশ্ন ছিল এক কিলোগ্রাম ভর যে সিলিন্ডারের ভর থেকে নির্ধারণ করা হয় সেটার ব্যাস কত? কিন্তু বইতে দেয়া ছিল ব্যাসার্ধ। আর। লিখে দিলেন ব্যাসার্ধের মান। আর সাথে সাথে পরীক্ষায় পূর্ণ নম্বর পাবার সম্ভাবনাকে নামিয়ে দিলেন শূন্যের কোটায়। আরো একটা প্রশ্ন এসেছিল সেই পরীক্ষায় আলফা কণার বেগ কতো? এই প্রশ্নটা দেখে তার কাছে মনে হয়েছিল এটা কি ফিজিক্স? এখানে আমাকে সব মুখস্ত করতে হবে,ফিল করার কিছু নাই ?। প্রথম থেকেই তার একটাই উপলব্ধি বিজ্ঞানে মুখস্ত করার কিছুই নেই পুরো ব্যাপারটাই ফিল করার।এজন্যই তিনি মনে করেন সবার কাছে বিজ্ঞানের আসল উপলব্ধিটা পৌছানো দরকার।এজন্যই মূলত তার বিজ্ঞান লেখকের ভূমিকায় অংশগ্রহন। তাই এই প্রচেষ্টা আরো সফল ও স্বার্থক হোক।

সবাই লেখকের জন্য দোয়া করবেন তিনি যেন তার উচ্চাঙ্ক্ষা পূরণে সফল হন এবং বিজ্ঞান আর মানুষের জন্য ছড়াতে পারেন ভালোবাসা।

-শুভকামণায় বন্ধুরা

ফেইসবুকের মাধ্যমে সরাসরি লেখকের সাথে যোগাযোগ করুনঃ

লেখকের অন্যান্য লেখার অফিসিয়াল পেজঃ

ইমেইলের মাধ্যমে যোগাযোগ করুনঃ

লেখকের প্রকাশিত অন্য বই

আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব বইটি সম্পর্কে আরো জানতে এখানে ক্লিক করুন

রকমারি থেকে এখনি অর্ডার করতে ক্লিক করুন এখানে

করোনা কালে বিশ্ব যখন অচল ঠিক সেই মুহূর্তে আমাদের দেশে ছেলে মেয়েদের বিশেষ করে সদ্য উচ্চ মাধ্যমিকে পদার্পন করা শিক্ষার্থীদের কথা চিন্তা করে মূলত এই বইটি ইবুক হিসেবে প্রকাশের সিদ্ধান্ত নেয়া হয়েছে। এটা মূলত ব্যাসিক ক্যালকুলাস শেখার বই,আশা করি আলোচিত বিষয়গুলো সকলের ব্যাপক কাজে আসবে।

পরবর্তীতে ক্যালকুলাসের সমগ্র বিষয়ের আলোচনা নিয়ে অমর একুশে গ্রন্থ মেলা ২০২১ এ একটা বই প্রকাশিত হবে ইনশা-আল্লাহ।

এক,

এই বইটি ফ্রি ইবুক হিসেবে ফেইসবুক ভিত্তিক বিজ্ঞানের বিভিন্ন গ্রুপে এবং ইন্টারনেটের বিভিন্ন সাইটে আপলোড করা হয়েছে যে কেউ এই বইটি অন্যের মাঝে বিলিয়ে দিতে পারো,এই বই থেকে প্রাপ্ত তথ্য ক্রেডিট সহ যেকোনো অনলাইন মাধ্যমে ছাড়তে পারো।

দুই,

আর কেউ যদি নিজের জন্য বইটির প্রিন্ট কপি তৈরী করতে তাও করে নিতে পারবে। কিন্তু কোনোভাবেই বানিজ্যিক ভাবে এই বইটি ব্যবহার করা যাবে না। কেউ বানিজ্যিক ভাবে প্রিন্ট করতে পারবে না।

আমার অনুরোধ থাকবে “আরো দশজনের কাছে এই বইটা পৌছে দাও”

- এই বইটির লেখক আসলে আমি নই আমার সমস্ত শিক্ষক যাদের কাছ থেকে আমি শিখেছি
- এই বইটিতে যেসব ছবি ব্যবহার করা হয়েছে সেগুলোর কোনো কপিরাইট নেই।
- যেসব কার্টুন ছবি ব্যবহার করা হয়েছে সেগুলো অ্যা কার্টুন গাইড টু ক্যালকুলাস বই থেকে নেয়া।
- বাকি যেসব গ্রাফ ব্যবহার করা হয়েছে সেগুলো আমার নিজের তৈরী এবং অন্যদের অনুমতি সাপেক্ষে ব্যবহৃত হয়েছে।

উৎসর্গ

যাকে উদ্দেশ্য করে ক্যালকুলাসের ব্যাসিক শেখানোর জন্য প্রথম লিখায় হাত দিয়েছিলাম
কখনোই ভাবি নি এইভাবে ক্যালকুলাসের উপর ইবুক বা প্রিন্টেড বই প্রকাশ করবো
যদিও যার জন্য প্রথম লিখছিলাম সে উদ্দেশ্য আজ অসফল
আমি আজ ইচ্ছে করলেই তাকে বলতে পারবো না তাকে
“এইযে তুমি একদিন বুঝায় চেয়েছিলা তাই এটা লিখেছি,
জানি না ক্যালকুলাস বোঝাতে পেরেছি কিনা? যাই হোক একবার খুলে দেখো”
অনেক অনেক ভালো থাকুক সেই মানুষটা।

আমার কথা

কি বলি এই ক্যালকুলাসের কথা
এতো কেবল গণিতের এক শাখা
বিজ্ঞান জগতে হতে চাইলে উন্নত
ক্যালকুলাসের জ্ঞানকে করতে হবে সমুন্নত

আমার এই বইটা লিখার এবং অনলাইন মাধ্যমে প্রকাশ করার উদ্দেশ্য আমাদের ছেলে-মেয়েরা শিখবে,নতুন কিছু করবে,অনুপ্রেরনা পাবো।আজ যুগ উন্নত হয়েছে ক্লাস ওয়ান টুতে পড়া ছেলে-মেয়েরা ব্ল্যাক হোক,জেনারেল রিলেটিভিটির কথা জানে। অনেকেই দেখছি রিলেটিভিটি,কোয়ান্টাম মেকানিক্সকে অলরেডি ভুল প্রমাণ করে ফেলেছেন নতুন নতুন তত্ত্ব বের করতে শুরু করেছেন। এ নিশ্চয়ই ভালো একটা খবর। কিন্তু খুব খারাপ লাগে যখন দেখি কেউ পুরো ব্যাপারটা ব্যাসিক ক্লিয়ার না করেই আস্ত প্রমাণিত তত্ত্বকে ভূল প্রমাণ করে ফেলেন,সত্যি বলতে বিজ্ঞানের এই চরম আঘাত দেখলে কষ্ট হয়। এজন্য বলি আমাদের নতুন কিছু করতে হবে শুধু পরীক্ষায় নম্বর পাওয়া বা টাকা উপার্জনের জন্য পড়াশোনা নয়। বিজ্ঞান পড়বো নতুন কিছু জানতে, পৃথিবীর মহাবিশ্বের রহস্য সমাধানের জন্য আর অন্যকে শেখানোর জন্য। এই বইটা এই উদ্দেশ্যেই। ইবুক ভার্সন উন্মুক্ত করে দেয়ার উদ্দেশ্য হলো বিনামূল্যে সবাই এটা নিতে পারবে এবং সবার মধ্যে ছড়িয়ে দিতে পারবে। সবার কাছে অনুরোধ থাকছে আরো ১০ জনের মধ্যে এই বইটি ছড়িয়ে দিন। এটা গণিতের গল্পের বই,একই সাথে এটা ফিল করে বোঝার জন্য একটা বই, এটা টেক্সট বই। আর একটা কথা যেহেতু একদম ফ্রি তাই এখানে ক্যালকুলাসের সব কিছু দেয়া হয়নি অনেক অনেক বিষয় বাদ দিয়েছি ইচ্ছে করেই। আমার অভীজ্ঞতা বলে বিনামূল্যে পাওয়া জিনিসের কেউ গুরুত্ব দেয় না,তাই এই বইটা আসলে প্রচারের জন্য যদি পাঠক চান আগামী বই মেলায় ক্যালকুলাসের পূর্নাঙ্গ আলোচনা নিয়ে আরো মোটা বই আসবে।

ইতিমধ্যে এই বইতে যা যা লিখা আছে তার একটা অংশ ফেইসবুকে বিজ্ঞানের বিভিন্ন গ্রুপে প্রকাশিত হয়েছে সেই হিসেবে পাঠকের সংখ্যা খুব একটা কম না। পাঠকদের বেশি সুবিধা দিতেই এই বইটা।

এবার কিছু মানবিক কথা। আমি যখন ফেইসবুকে লিখতাম দেখতাম অনেকেই লেখা গুলো সিরিয়াসলি বোঝার জন্য পড়ছে। আমার চেয়ে বয়সে বড় তারাও পড়ছে অনেকেই ইনবক্সে এসেছে কৃতজ্ঞতা জানাচ্ছে। এটা সত্যিই অন্যরকম একটা পাওয়া। আজ দেখেন একজন হয়তো পৃথিবীর বড় কোনো বিশ্ববিদ্যালয় থেকে গণিতে পড়াশোনা করছেন,অনেক অনেক জানেন।কিন্তু এইভাবে তৃণমূল পর্যায়ে তিনি শেখানোর সুযোগ পান না। অথচ আজ আমি যে এখনো উচ্চমাধ্যমিক পাশ করেনি,প্রতিনিয়ত লিখে যাচ্ছি সবাইকে বোঝানোর চেষ্টা করছি কতোটা সফল জানি না। যখনই আমি আমার কোনো টিচারকে বলি স্যার এভাবে লিখছি তারা বলেন "এগিয়ে যাও।অনেক বড় হবে। তোমার মধ্যে যেটা আছে একজনের মধ্যে নেই,সেটা ছড়িয়ে দাও।একজন মহাজ্ঞানির ও একটা বিষয় না জানা থাকতেই পারে যারা তোমার কাছে আসে তাদের তোমার বেস্টটা দিয়ে বোঝাও বিজ্ঞান।" আত্ন প্রসংশা আর কতো করবো। এখন বাদ দেই।

জীবনের খুব ক্ষুদ্র একটা সময় পার করেছি। এখনো কিছুই শিখিনি, আজও ভাগ্য হয়নি জ্ঞান সাগড়কে একবার চোখে দেখার সেখানে ডুব দেয়া তো অনেক দূরে। তারপরেও জীবন যেটুকু অভীজ্ঞতা দিয়েছে সেই অভীজ্ঞতা বলছে আসলে অর্থ-সম্পদ,রূপ-গুন,ক্ষমতা এসব কিছুই না। ভালো করে খুজে দেখুন পৃথিবীতে মানুষ খুজে পাবেন না,পেলেও খুবই স্বল্প। আমরা বলি সাতশ কোটি মানুষ পৃথিবীতে এতো এতো সমস্যা,মারামারি,হানাহানি,অর্থ-ক্ষমতা-স্বার্থ এছাড়া কি আছে। যদি সত্যিই সাতশ কোটি মানুষ থেকে থাকে তাহলে আমার প্রকৃত মানুষের সঙ্গা অনুযায়ী পৃথিবীর তো এমন হওয়ার কথা নয়। ক্ষমতা বলে সব করা যায় আজ

আপনি উপজেলার প্রধান,জেলা প্রধান,বিভাগের প্রধান,পুলিশ সুপার আপনি চাইলে আমার বলা সত্যকেও মিথ্যা প্রমাণিত করতে পারেন। আপনার টাকা আছে জ্ঞান সম্পদ আছে,রূপ-গুন আছে আপনি আমাকে তুচ্ছ তাচ্ছিল্য করতেই পারেন আপনার ক্ষমতা দিয়ে আমার সব কিছু ধ্বংস করার ক্ষমতা রাখেন কিন্তু না আমি এগুলোকে ক্ষমতা মনে করি না সত্য বলে একটা জিনিস আছে এর অসীম ক্ষমতা আসুন সত্য দিয়ে নিজেদের মধ্যে সব ঝামেলা দূর করি,সুন্দর হবে পৃথিবী। পৃথিবীতে সব পাওয়া যায় দুর্লভ হলো ‘‘ভালোবাসা’’ এই জিনিসটা সবাই দিতে পারে না। আমরা সবাই আসলে এমন একটা ভাব করছি যেন আমাদের আসল বাসা থেকে কোথাও বেড়াতে এসেছি শুধু কয়েক ঘন্টার জন্য এরপর আমরা সেই জায়গাটার সৌন্দর্য মুগ্ধ হয়ে বলছি এই জায়গা আমার,আমি এখান থেকে যাবো না সব ক্ষমতা আবার।আমি মাঝে মাঝে ভাবি আচ্ছা আর কত দিনই বা ভালোভাবে বাচতে পারবো সর্বোচ্চ ২০ বছর এরপর আর কিছুই ভালো লাগবে না। প্রতিটা মানুষকে যেতে হবে নিজের ঠিকানায় তাহলে আমরা কেন এমন বোকার মতো করছি? আমি এতোদিনে এটাই ফিল করেছি প্রকৃত মানব ধর্ম হলো এটাই যেন আপনার দ্বারা কারো কোনো ক্ষতি না হয় ,কেউ কষ্ট না পায়।

আর এই বইয়ের মধ্যে যা যা লিখেছি আপনারা পড়বেন এবং বিচার করে আমাকে জানাবেন কেননা,সমালোচনা ছাড়া বড় হওয়া যায় না। পচিশ হাজারের মতো শব্দ তাও আবার গণিত নিয়ে ভূল থাকা স্বাভাবিক এগুলোর জন্য আমি দুঃখিত।

সবাই আমার জন্য দোয়া করবেন।

-মোহাম্মাদ জিশান
৩১ শে জুলাই ২০২০
সিংড়া,নাটোর।

সূচিপত্র

অধ্যায়–১

ফাউন্ডিং ফাদার্স

ফাউন্ডিং ফাদার্স অব ক্যালকুলাস (Founding Fathers of Calculus)

কোথা থেকে আসলো ক্যালকুলাস নিশ্চয়ই কেউ গবেষণা পড়াশোনা করে বের করেছে। অনেকেরই হয়তো জানা আছে ক্যালকুলাসের আবিষ্কারক নিউটন আবার অনেকেই জানে লাইবনিৎজ। কিন্তু এর পেছনে আসল ঘটনা কি। আমরা শুনবো,

এটা লিখার উদ্দেশ্য এই নয় যে পড়ার পর পাঠকের মধ্যে কোনো বিজ্ঞানির প্রতি বিরাগের সৃষ্টি করা অথবা তাদের প্রতি সন্মানের অবক্ষয় হওয়া।

লিখছি ইতিহাসের পাতা থেকে,

মহাবিজ্ঞানী নিউটন,তিনি সত্যিই মহাবিজ্ঞানী খুব ছোট বেলায় সাধারণজ্ঞানের বইতে একটা প্রশ্ন দেখেছিলাম। সর্বকালের সর্বশ্রেষ্ট পদার্থবিজ্ঞানী কে? উত্তরটা ছিলো স্যার আইজ্যাক নিউটন। তখন এতো কিছু জানতাম না কেন নিউটন? কি করেছে লোকটা?সত্যি বলতে আমার মনে হয় পদার্থবিজ্ঞানের জগতে ওনার কাজের ব্যাপকতা বুঝতে হলে আগে একজন পদার্থবিদ হতে হবে। ২০০৫ সালে রয়েল সোসাইটি বিজ্ঞানের ইতিহাসে কার প্রভাব সবচেয়ে বেশি এ প্রশ্ন নিয়ে একটি ভোটাভুটির আয়োজন করে৷ ভোটের ফলাফলে দেখা যায়, এক্ষেত্রে নিউটন আইনস্টাইনের চেয়েও অধিক প্রভাবশালী।

শুধুই পদার্থবিজ্ঞান কেন পদার্থবিজ্ঞানের অবিচ্ছেদ্য অংশ গণিতের জগতেও নিউটনের জুড়ি মেলা ভার | নিউটন সাধারণীকৃত দ্বিপদী উপপাদ্য প্রদর্শন করেন, একটি ফাংশনের শূন্যগুলোর আপাতকরণের জন্য তথাকথিত নিউটনের পদ্ধতি আবিষ্কার করেন এবং পাওয়ার সিরিজের অধ্যয়নে বিশেষ ভূমিকা রাখেন। আমাদের এই বই যে ক্যালকুলাসের জন্য যে ক্যালকুলাস গণিতের এমন একটা শাখা যেটা বিজ্ঞানের বহু নতুন দ্বার উন্মোচন করেছিল। লোভনীয় এই গণিত এর আবিষ্কারক কে হতে চাইবেন না। তাইতো স্বয়ং নিউটন আর লাইবনিৎজ এই দুই মহান গণিতবিদ দুজনের মধ্যে কাদা ছোড়াছুড়ির মত ঘটনা ঘটেছিল | আসলে কে আবিষ্কার করেছে এই মহান ক্যালকুলাস? এই নিয়ে ইতিহাসের পাতায় লেখা আছে বহু কথা।

নিউটনকে হয়তো সবাই বেশ ভালো ভাবেই চেনো,কিন্তু গণিতবিদ লাইবনিৎজ এর সাথে পরিচয় কিছুটা হলেও কম। লাইবনিৎজকে একটু জেনে আসা যাক। নিউটনের জন্মের চার বছর পরে জার্মানির লেইপজিগ শহরে এক সম্ভ্রান্ত শহরে ওনার জন্ম। তার ব্যবহৃত

ক্যালকুলাসের অংকপাতন পদ্ধতি বা নোটেশন গুলো বর্তমানে অনুসরন করা হয়। আধুনিক কম্পিউটারের মূল ভিত্তি বাইনারি পদ্ধতি তার উদ্ভাবন। পদার্থবিজ্ঞান,জীববিজ্ঞান,সম্ভাবনা তত্ত্ব,তথ্য বিজ্ঞানে তার ব্যাপক অবদান রয়েছে।

এবার আসি ক্যালকুলাস নিয়ে নিউটন লাইবনিৎজ এর মধ্যে যে কাদা ছোড়াছুড়ির মতো ঘটনা ঘটেছিল সেই ঘটনায়।

আসলে লিবনিজ ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেন ১৬৭৪ সালে এবং প্রকাশ করেন ১৬৮৪ সালে অপরদিকে নিউটন আবিষ্কার করে ১৬৬৬ সালে কিন্তু প্রকাশ করেন ১৬৯৩ সালে(নিউটনের ডায়েরী হতেও তা প্রমান পাওয়া যায়)। এখন যেহেতু লিবনিজ আগে প্রকাশ করেছেন সেহেতু সে বলতেই পারে যে ক্যালকুলাস আমি আবিষ্কার করেছি। কিন্তু নিউটন বললেন যে ক্যালকুলাস আমি আগে আবিষ্কার করেছি।

এখন কাকে এর আবিষ্কারকের মর্যাদা দেওয়া হবে সে নিয়ে বড় মাপের এক ঝগড়ার সৃষ্টি হলো |

নিউটন দাবী করেছিলেন, ১৬৬৬ সালে তিনি ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেছেন। তার আবিষ্কৃত ক্যালকুলাস ছিল মূলত "ফ্লাক্সিয়ন এবং ফ্লুয়েন্টের পদ্ধতি"। কিন্তু ১৬৬৬ এরও কয়েক দশক পরে তিনি প্রথমবারের মত এই পদ্ধতির কথা গবেষণাপত্র আকারে প্রকাশ করেন । এর মধ্যে অবশ্য তার একটি প্রকাশনার পিছনের পাতায় এ সংক্রান্ত সামান্য কিছু কথা উল্লেখ করেছিলেন। অপরদিকে লাইবনিৎস ১৬৭৪ সালে ক্যালকুলাসের একটি ধরন আবিষ্কার করেন এবং ১৬৮৪ সালেই তা গবেষণাপত্র আকারে প্রকাশ করেন। ১৬৯৬ সালে গিয়্যোম দ্য লোপিতাল লাইবনিৎসের ক্যালকুলাস বিষয়ে একটি লেখা প্রকাশ করেছিলেন। অপরদিকে নিউটন ১৬৯৩ সালে প্রথম ক্যালকুলাসের কছু অংশ প্রকাশ করেন এবং ১৭০৪ সালে সম্পূর্ণ প্রকাশ করেন। ১৬৭৬ সালে লাইবনিৎস লন্ডন ভ্রমণে গিয়ে নিউটনের একটি অপ্রকাশিত পাণ্ডুলিপি দেখেছিলেন। এ কারণেই প্রশ্ন উত্থাপিত হয়, লাইবনিৎস নিউটনের ধারণার উপর ভিত্তি করেই ক্যালকুলাসের উন্নয়ন ঘটিয়েছিলেন কি-না। এই প্রশ্ন থেকে একটি দীর্ঘ বুদ্ধিবৃত্তিক বিবাদের সূচনা হয়, কে আগে ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেছিলেন তা নিয়ে। ১৬৯৯ সাল থেকে হালকা হালকা শুরু হয়ে ১৭১১ সালের পর এই বিবাদ পূর্ণোদ্যমে চলা শুরু করে।

এই সমস্যার সমাধানে একটি তদন্ত কমিটি গঠন করা হল। মজার ব্যাপার যে ঐ সময় রয়েল সোসাইটির দায়িত্বে ছিলেন নিউটন নিজেই

এবং পদাধিকার বলে নিউটন নিজেই হলেন ঐ তদন্ত কমিটির হেড | অনেক তদন্ত করার পরে নিউটন ঘোষনা দিলেন যে, হ্যা নিউটনই প্রথম ক্যালকুলা আবিষ্কার করেছেন। ব্যাপারটা কি হাস্যকর।

বিজ্ঞানী স্টিফেন হকিং তার আ ব্রিফ হিস্টরি অফ টাইম গ্রন্থের পরিশিষ্টে নিউটনের একটি সংক্ষিপ্ত জীবনী সংযুক্ত করেছেন যাতে উল্লেখ করেন,

নিউটনের সাথে আরেকটি বড় ধরনের বিরোধ ছিল জার্মান দার্শনিক ও গণিতজ্ঞ গটফ্রিড লাইবনিৎসের । লাইবনিৎস এবং নিউটন সম্পূর্ণ স্বাধীনভাবে প্রায় একই সময়ে বিজ্ঞানের একটি নতুন শাখার উন্নয়ন ঘটান যা ক্যালকুলাস নামে পরিচিত। আধুনিক পদার্থবিজ্ঞানের অন্যতম ভিত্তি হচ্ছে এই শাখাটি। যদিও আমরা এখন জানি নিউটন লাইবনিজের কয়েক বছর পূর্বেই এটি আবিষ্কার করেছিলেন, তবে তিনি তা প্রকাশ করেছিলেন অনেক পরে অর্থাৎ ১৬৯৩ খ্রিস্টাব্দে; আর পূর্ণ বিবরণ প্রকাশ করেছিলেন ১৭০৪ খ্রিস্টাব্দে। অথচ লাইবনিজ তার কাজের একটি পূর্ণ বিবরণ ১৬৮৪ খ্রিস্টাব্দেই প্রকাশ করেছিলেন। মূলত লাইবনিজের ব্যবকলন পদ্ধতিই পরবর্তীকালে মহাদেশ জুড়ে গৃহীত হয়েছিল। কে আগে এটি আবিষ্কার করেছেন তা নিয়ে তৎকালীন বিজ্ঞানী সমাজের মাঝে প্রবল বিতর্কের সূত্রপাত ঘটে। দুজনের বিরুদ্ধে ও পক্ষেই অনেক লেখালেখি হয়। আশ্চর্যের বিষয়, নিউটনের পক্ষে লিখিত অধিকাংশ নিবন্ধই ছিল তার নিজের লেখা এবং তার বন্ধুদের নামে প্রকাশিত। বাগ্‌বিতণ্ডা চলতে থাকায় লাইবনিজ বিষয়টি রয়েল সোসাইটিতে উত্থাপন করেন। সোসাইটির সভাপতি নিউটন এর সঠিক অণুসন্ধানের জন্য তার বন্ধুদের নিয়ে একটি পক্ষপাতিত্বমূলক কমিটি গঠন করেন। এই কমিটি পূর্ণ ক্ষমতায় কাজ শুরু করে ১৭১১ খ্রিস্টাব্দে। রয়েল সোসাইটির প্রতিবেদনে লাইবনিজকে গবেষণা কর্ম চুরির দায়ে অভিযুক্ত করা হয়। এরপর নিউটন নাম গোপন করে এক সাময়িকীতে রয়েল সোসাইটির প্রতিবেদনের পক্ষেও লিখেছিলেন । লাইবনিজের মৃত্যুর পর নিউটন বলেছিলেন. লাইবনিজের মন ভেঙ্গে দিয়ে তিনি খুব শান্তি পেয়েছেন। লাইবনিজের সাথে যখন তার বিরোধ চলছিল তখনই নিউটন কেমব্রিজ ছেড়ে চলে গিয়েছিলেন। বিজ্ঞানের জগৎ ছেড়ে তিনি ক্যাথলিক-বিরোধী রাজনীতি ও পরবর্তীকালে সংসদীয় কাজে যোগ দেন। একসময় রয়েল মিন্টের ওয়ার্ডেনের মতো গুরুত্বপূর্ণ পদে অধিষ্ঠিত হন। সেখান থেকে তিনি জাল-বিরোধী কর্মকাণ্ডকে জোরদার করে তুলেন। এর কারণে অনেককে প্রাণ দিতে হয়েছিল বলে স্টিফেন হকিং তার বইয়ে লিখেছেন।

ক্যালকুলাসের সব মৌলিক তত্ত্ব কোনো একজন গণিতজ্ঞ কোনো অল্প সময়ের মধ্যে আবিষ্কার করে ফেলেননি। বিভিন্ন পদার্থবিজ্ঞানী ও গণিতজ্ঞ মিলে বিষয়টির ধীরে ধীরে উন্নতিসাধন করেছেন। ক্যালকুলাস আবিষ্কারের একটা সংক্ষিপ্ত ইতিহাস এখানে দিলাম ।

কলনবিদ্যা বা Calculus হল আধুনিক গণিতের একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ন শাখা। 'Calculus' শব্দটি হল একটি ল্যাটিন শব্দ, যার অর্থ হল শিলা (stone) । এর কারণ হল তখনকার রোমানগন গণনার কাজে শিলা ব্যবহার করতেন। এর কয়েক শতাব্দী পর 'Calculare' শব্দটি ব্যবহার করা হত গণনা বোঝাতে। কলনবিদ্যার উদ্ভাবকেরা অপরিমেয় ক্ষুদ্র (infinitesimally small) সংখ্যাসমূহ নিয়ে গণনা বোঝাতে শব্দটি ব্যবহার করতেন।

খ্রিস্টপূর্ব তৃতীয় শতকে Archimedes সর্বপ্রথম বিষয়টি নিয়ে চর্চা শুরু করেন। তিনি একটি অধিবৃত্তকে কয়েকটি আয়তাকার ক্ষেত্রে বিভক্ত করে প্রতিটির ক্ষেত্রফল যোগ করে অধিবৃত্তটির ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্নয়ের পদ্ধতি আবিষ্কার করেন। এরপর ক্ষেত্রগুলির সংখ্যা বৃদ্ধি করে এবং প্রতিটি আয়তাকার ক্ষেত্রের প্রস্থ অত্যন্ত কমিয়ে অধিবৃত্তের ক্ষেত্রফল আরও সূক্ষ্মভাবে নির্নয় করেন। অবশেষে আয়তাকার ক্ষেত্রগুলির সংখ্যা অসীম সংখ্যক করে ক্ষেত্রগুলির **অবক্ষয়ের পদ্ধতিতে** অধিবৃত্তটির সঠিক ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে সমর্থ হন।

1612 খ্রিস্টাব্দে গণিতজ্ঞ Kepler একটি মদপাত্রকে (wine cask) অপরিমেয় ক্ষুদ্র বেধের অসংখ্য বৃত্তাকার অংশে বিভক্ত করে মদপাত্রটির আয়তন নির্ণয়ে সমর্থ হন। Kepler ইতিপূর্বে বৃত্ত ও উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে একই পদ্ধতি প্রয়োগ করে সমর্থ হন। যে-কোনো অনিয়মিত আকারের ক্ষেত্র বা ঘনবস্তুর ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফল বা ঘনফলগুলি যোক করে অংশ সংখ্যা অসীম সংখ্যক

করে যোগফলের সীমামান নির্ধারনের দ্বারা ক্ষেত্র বা ঘনবস্তুর ক্ষেত্রফল বা আয়তন নির্ধারনের পদ্ধতিকেই আধুনিক গণিতে বলা হয় **‘সমাকলন’**।

সপ্তাদশ শতাব্দীর প্রথম দিকে প্রখ্যাত গ্রিক দার্শনিক গণিতজ্ঞ Rene Descartes (1596-1650) স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে চল স্থানাঙ্কের প্রচলন করেন যা গণিতের ইতিহাসে এক যুগান্তকারী ঘটনা। একই সময়ে ফরাসি গণিতজ্ঞ Pierr de Fermat অপেক্ষক ও চলরাশির অতি ক্ষুদ্র বৃদ্ধির অনুপাত সম্বন্ধে আলোকপাত করেন। 1629 খ্রিস্টাব্দে তিনি বক্রের স্পর্শক অঙ্কন পদ্ধতি এবং চরম ও অবম মান নির্নয়ের পদ্ধতি আবিষ্কার করে অন্তরকলনবিদ্যার সূচনা করেন।

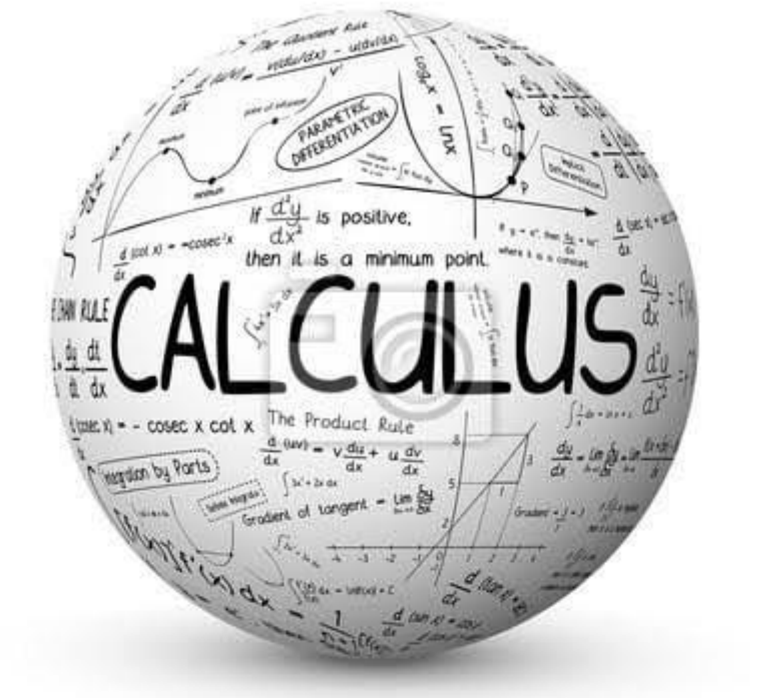
পরবর্তীকালে Fermat-এর গবেষণার ভিত্তিতেই Sir Isaac Newton (1642-1727) এবং Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) অবকলন অর্থাৎ আপেক্ষক ও চলরাশির অতিক্ষুদ্র বৃদ্ধির অনুপাতের সাহায্যে অপেক্ষকের পরিবর্তনের হার নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচনা করেন।

পরবর্তীকালে বিভিন্ন বিজ্ঞানী ও গণিতবিদ বিষয়টির প্রভূত উন্নতিসাধন করেন। এদের মধ্যে **Gauss, Euler, Taylor, D’ Alembert, Lagrange, Maclaurin** প্রভৃতির নাম বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য।

এবার আসি আসল কথায় বিজ্ঞানের যেকোনো আবিষ্কারের ভিত্তিটা একজনের হাতে হয় না। যখন বড় কোনো সরকারি প্রজেক্টের কাজ উদ্বোধন করা হয় তখন একটা বড়-সড় অনুষ্ঠান হয় জানো তো। এবার সেই অনুষ্ঠানে প্রজেক্টের ভিত্তি স্থাপন করা হয় বড় বড় সরকারি কর্মকর্তা একটুখানি করে সিমেন্ট ঢালেন। এরপর শত শত শ্রমিকের দীর্ঘদিনের পরিশ্রমের পর সাধারণ জনগণের জন্য নতুন সুযোগ সুবিধা নিয়ে আসে সেই প্রজেক্ট। শত শত শ্রমিক কাজ করলেও প্রজেক্ট যখন পূর্নতা পায় প্রজেক্টের পাশে একটা ফলক লাগিয়ে দেয়া হয় সেখানে শুধু একজন জনপ্রতিনিধির নামই লিখা থাকে,এতো শ্রমিকের নাম লিখা থাকে না,আর তা থাকাও যুক্তিযুক্ত নয়। বিজ্ঞানের তত্ত্ব সূত্র এগুলো পুরোপুরি এইরকম নাহলেও প্রতিটা তত্ত্বের উৎকর্ষ সাধনে বহু বিজ্ঞানির হাত থাকে,এগুলো শুধু একজনের পরিশ্রম না। কিন্তু পরিপূর্ন রূপে আসার পর একজন বিজ্ঞানিকে ওই তত্ত্বের জনক হিসেবে ঘোষণা দেয়া হয়। ক্যালকুলাসের ক্ষেত্রেও অনেকটাই তাই হয়েছিল একজন বিজ্ঞানি ইংল্যান্ডে একজন জার্মানিতে কে হবেন ক্যালকুলাসের জনক এই নিয়ে কাদা ছোড়াছুড়ি। কি দরকার ছিলো এতো বিরোধের আজ আমরা বলি স্যার আইজ্যাক নিউটন,গটফ্রিড উইলিয়াম লাইবনিৎজ দুজনেই ক্যালকুলাসের জনক। আজ আর কোনো বিরোধ নেই,প্রতিটি জায়গায় নিউটন লাইবনিৎজ দুজনকেই ক্যালকুলাসের আবিষ্কারকের সন্মান দেয়া হয়।

অনেক অনেক সন্মান আর শ্রদ্ধা ক্যালকুলাসের আবিষ্কারক নিউটন আর লাইবনিৎজ এর প্রতি।

তথ্যসূত্রঃইন্টারনেট।

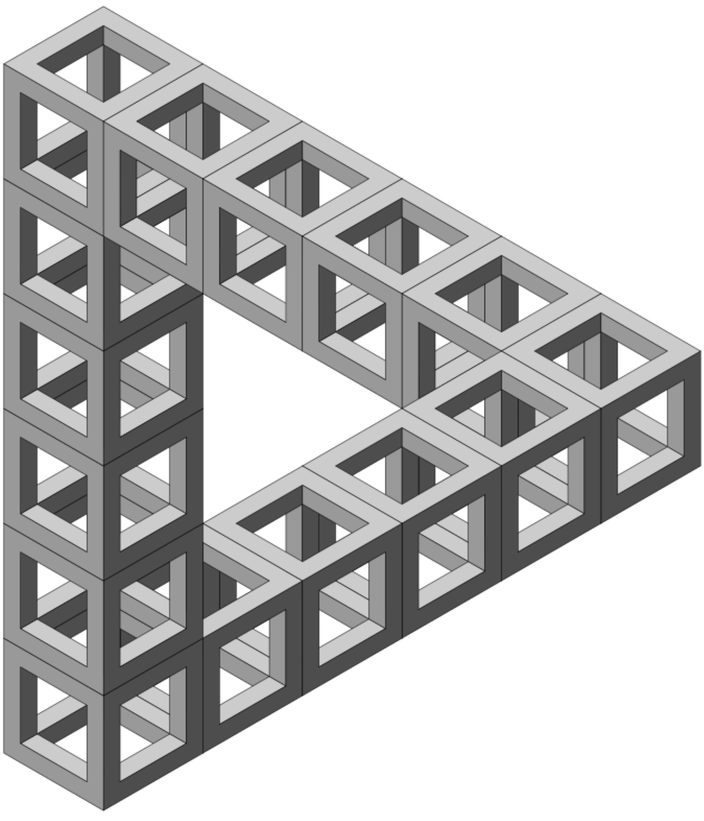


ক্যালকুলাস কি জিনিস:খায় না মাথায় দেয়(What is Calculus To eat or to use)

ক্যালকুলাস শব্দের অর্থ ক্ষুদ্র নুড়ি পাথর। আমি বিভিন্ন ফটোশেয়ারিং সাইটে ক্যালকুলাস লিখে সার্চ দিতাম ক্যালকুলাস রিলেটেড সব ছবি পাওয়ার জন্য,একবার পেয়েছিলাম কিডনির ছবি,হয়তো কিডনিতে ছোট ছোট পাথর হয় এই জন্য কিডনির ছবি এসেছিল। যাইহোক,তোমরা যখন বই খুলেছো নিশ্চয়ই জানো এটা গণিতের বই। তাহলে গাণিতীক ভাবেই বলি ক্যালকুলাস গণিতের এমন একটা শাখা যেখানে ফাংশনের পরিবর্তন হার হসাব করা হয় অথবা কোনো বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্নয় করা হয়। এইযে ফাংশনের পরিবর্তন হার নির্নয় অথবা বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্নয়ের এই বিদ্যার নাম ক্যালকুলাস। ক্লিয়ার? জানি একটুও ক্লিয়ার না। আমার এই কথা গুলো থেকে প্রথম ক্যালকুলাস শুরু করেছে এমন মানুষ কিছুই বুঝবে না,বোঝা তো দূরের কথা এমন কঠিন শব্দ পেলে অনেকেই পড়া ছেড়ে পালাবে। যদি এখনই ক্যালকুলাসের গাণিতীক হিসেবে চলে যাই ফাংশন নদীর প্রতিটি বাকে বাকে ধাক্কা খেতে হবে তোমাদেরকে। কাজেই ক্যালকুলাস কি জিনিস জানার আগে ফাংশন সম্পর্কে বেশ ভালোভাবে জানতে হবে। তাই ক্যালকুলাস নিয়ে পড়াশোনা শুরুর আগে যে জিনিস গুলো জানতে হবে সেগুলো নিয়ে সাজানো হয়েছে আস্ত একটা অধ্যায়। আমদের শুরুর অধ্যায় **প্রি-ক্যালকুলাস**

অধ্যায়- ২

প্রি-ক্যালকুলাস



ছোট ছোট কিছু হিসাব আর গল্প দিয়ে চলো ফাংশনের ধারণাটা দেয়া যাক।

ফাংশন(Function)

আজকাল আমরা সবাই দূর-দূরান্তে যোগাযোগের জন্য মোবাইল ফোন ব্যবহার করি। তো সবাই জানে সিম কোম্পানি দেশের সরকার কেউ খুব একটা ভালো মানুষ না তারা চায় টাকা!

তো ধরো কলরেট এক পয়সা এক মিনিট কথা বলতে তাহলে 60 cent মানে 0.6 টাকা। এটা নিবে সিম কোম্পানি এরা আবার দেশে তো ফ্রি ব্যবসা করে না। মানে সরকার করতে দেয় না। এদের কাছ থেকে কিছু টাকা নেয়। ধরো,কোনো দেশে কলরেটের 20% আবার সরকারি শুল্ক হিসেবে নেয়।
মনে করো,কেউ t মিনিট কথা বলবে তাহলে মোট কতো টাকা লাগবে আমরা সেটা বের করবো।

ধরে নিচ্ছি, x টাকা লাগবে,

$$x = \text{খরচ} + \text{সরকারি শুল্ক}$$
$$x = (\text{সময়} \times \text{কলরেট}) + \text{খরচ} \times \text{২০}\%$$
$$x = 0.6 \times t + (0.6 \times t) \times 20\%$$
$$\Rightarrow x = 0.6 \times t + (0.6 \times t) \times 20\%$$
$$\Rightarrow x = \frac{3t}{5} + (\frac{3t}{5} \times \frac{20}{100})$$
$$x = \frac{3t}{5} + \frac{3t}{25}$$
$$x = \frac{18}{25}t$$

সহজ একটা হিসাব একটু মজা করার জন্য বেশি ধাপে করলাম। কারো কারো কাছে হয়তো বিরক্ত লাগতে পারে। এবার আমরা একটা রাশি পেয়ে গেছি যেটা দিয়ে খুব সহজে কতক্ষণ ফোনে কথা বলতে কতো খরচ হয় তা বের করা যায়। নিচে হিসাবের একটা টেবিল দিলাম

সময়(t) মিনিট	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**
খরচ(x) Taka	0.72	2.16	3.6	5.04	6.48

দেখতেই পাচ্ছো t এর সাথে x এর একটা সুন্দর সম্পর্ক আছে এটা থেকে চাইলে t এর যেকোনো মানের জন্য x বের করা যায়। তাহলে কি পাওয়া গেল একটা সুন্দর সম্পর্ক t আর x এর। তাই না!! এই সম্পর্কটার কি নাম দিবো একটা রিলেশন?প্রেম কি এটাকে প্রেম বলা যাবে? এই সম্পর্কগুলোকে কি বলা যায় সেই উত্তর দিবো একটু পরে,পড়তে থাকো সব পেয়ে যাবে।

এবার যদি বলা হয়, কত টাকা খরচ হলো সেটা থেকে কত সময় কথা বলেছি সেটা বের করবো। বেশ সহজ তাই না?আরো একটা সুন্দর সম্পর্ক।

$$t = \frac{25}{18}x$$

এবারের টেবিল বানানো আমার জন্য খুব সহজ শুধু কপি করে সময় আর খরচ পরস্পরের জায়গা বদলে দিলেই হলো

খরচ(x) Taka	**0.72**	**2.16**	**3.6**	**5.04**	**6.48**
সময় (t) মিনিট	1	3	5	7	9

একটা বিষয় খেয়াল করো,t যখন ইচ্ছে হচ্ছে নিজের মান পালটে ফেলছে তার ইচ্ছে মতো t এর খেয়াল খুশিমত আসছে x এর মান। t কে খুশি করার জন্য x উপযুক্ত মূল্য পরিশোধ করছে। ঠিক যেন একটা ছেলে একটা মেয়ের জন্য সব দিয়ে দিচ্ছে নিজেকে পালটে ফেলছে তার ক্রাশের জন্য,বজায় রাখছে একটা সুন্দর সম্পর্ক।

এবার একই ভাবে x এর বিভিন্ন মান গুলো দিয়ে যদি জানতে চাওয়া হয় t কতো? তাহলে শুধুই একটা বিপরীত প্রক্রিয়া ঘটে আগের টেবিল থেকে যখন x এর মান গুলো বসানো হয় তখন ঠিক আগের সম্পর্কটাই ফিরে আসে। এর অর্থ কি x,t দুজনেই একটা সম্পর্ক মেনে চলে। একে অপরের মন মতো চলতে পারে এই সম্পর্কের নাম দেয়া হয় ফাংশন।

$$x = \frac{18}{25}t$$

এখানে t যেকোনো মান গ্রহন করতে পারে নিজের ইচ্ছে মতো চলতে পারে তাই এর নাম হলো চলক। x হলো এমন কেউ যে t এর খেয়াল খুশি মতো বদলায়, t এর উপর নির্ভরশীল x . এজন্য x কে বলা হয় t চলকের ফাংশন।

এবার আমরা আরো একটা কাজ করেছিলাম সেটা হলো x এর মান থেকে t বের করতে পেরেছিলাম। তখন কিন্তু x পরিবর্তন হচ্ছিল আর x এর খেয়াল খুশিমত মান দিচ্ছিল t । এই ক্ষেত্রে চলক x আর x চলকের ফাংশন t

টেবিল দুইটা থেকে লক্ষ্য করো,

x যদি বলে 3 মিনিট কথা বলার জন্য আমার মান 2.16 তাহলে বিপরীত ক্রমে t বলে কথা বলার সময় 3 হলে খরচ হবে 2.16

একটাই সম্পর্ক দুজনেই রক্ষা করে চলেছে আমরা বলি x হলো t এর ফাংশন t জানলে x জানা যায়

বিপরীত ভাবে দেখালাম, x জানা থাকলে t জানা যাবে আগের মতো একই কথার পুনরাবৃত্তি হয় শুধু বিপরীতক্রমে। তাই একে বলা হয় বিপরীত ফাংশন।

এই নিয়ে আবার পরে কথা হবে।

গণিতের জগতে যেকোনো গাণিতীক কাজকেই একটা ফাংশন বলা যাবে। যেমন ৩ আর ৫ যোগ করে হয় ৮ এটাও একটা ফাংশন। ৮ তৈরীর ফাংশন!!

এভাবে, যোগ(৩,৫)=৮

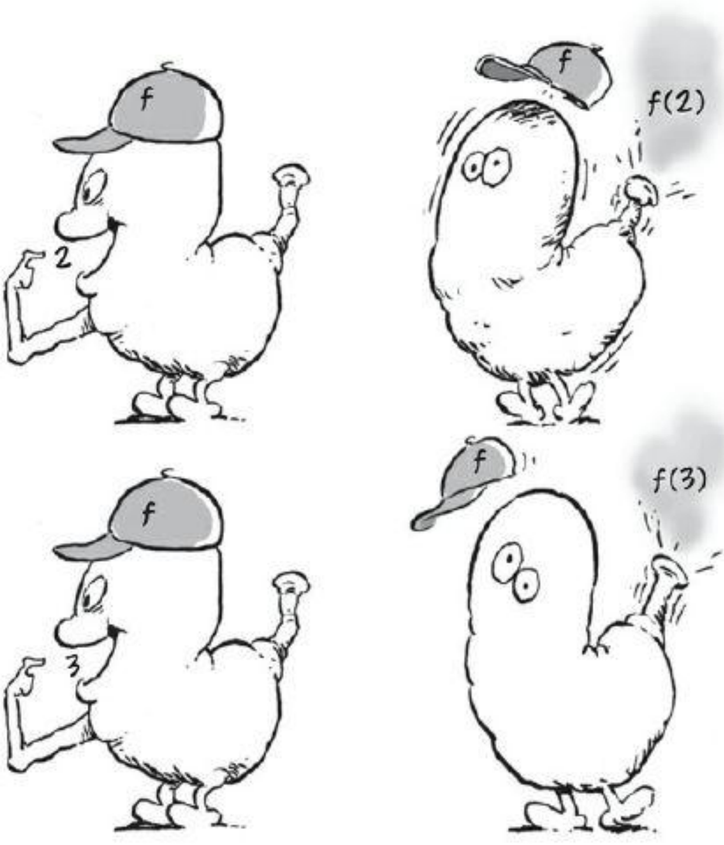
Add(3,5)=8

এতোক্ষণ যে সহজ ফাংশন নিয়ে কথা বললাম সেটার দিকে একবার তাকানো যাক।

$$x = \underbrace{\left(\frac{25}{18}\right)}_{\text{ধ্রুবক}} \underbrace{t}_{\text{চলরাশি}}$$

এই ফাংশনটার একটা অংশ ইচ্ছে মতো পাল্টে দিয়ে কতো মিনিট কথা বলতে কতো টাকা লাগবে তা বের করা যায়। মানে এটা একটা চলরাশি কিন্তু আরো একটা অংশ আছে যেটা সব সময় একই থাকবে ইচ্ছে করলেই পরিবর্তন করা যাবে না। একদম আলোর বেগের মতো !!শূন্যে চলার সময় আর কোনো প্রভাব না থাকলে কিছুর প্রভাব না থাকলে যেখান থেকে যেভাবেই মাপুন মান একই

যে অংশটার অন্য মান গ্রহন মানে চলার ক্ষমতা আছে তার নাম চলক। আর যে অংশটা একদম অপরিবর্তিত থাকে সেটা তো ধ্রুব এর নাম হলো ধ্রুবক।



ফাংশন জিনিসটা ঠিক এই রকম ছবিতে লক্ষ্য করো ফাংশন যা খাচ্ছে তার আউটপুট হিসেবে হিসাব নিকাশ করে বের করে দিচ্ছে। সাধারণ ভাবে Function এটা তার নামের ইংরেজি বানান এই কারনে সে f লেখা টুপি পরে আছে।

তো ফাংশন উপরে আকা ওই কার্টুন গুলোর মতো। ওদের খেতে দেয়া হলে খায় তারপর আউটপুট বের করে দেয়। তবে সব কিছু খেতে পারে না,আর খেতে পারলে এবং খেয়ে আউটপুট দিলে তবেই ফাংশন বলা হয় নাহলে না। মানে বুঝতে পারছো উপযুক্ত খাবার ইনপুটে নিয়ে তার আউটপুট দেয়া মেশিন টাইপের জিনিস এই ফাংশন।

আমাদের আলোচনার x সে t এর একটা ফাংশন অংক করার সময় তো এই রকম কার্টুন আকা সম্ভব না তাই, একটা প্রতীক দিয়ে ফাংশনকে লিখা হয়।

যেমন আমাদের t চলকের ফাংশনটাকে এভাবে লেখা যাবে $x = f(t)$

$$f(t) = \frac{18}{25}t$$

এবার যদি ফাংশনের আউটপুট t না হয়ে অন্য কিছু হয় তাহলে ঠিক একই ভাবে $f(1), f(2), f(a), f(b)$ *এই রকম।*

ফাংশনের আরো কিছু সাধারন প্রতীক হতে পারে যেমনঃ$g(), h(), \ldots$

এই ছিল ফাংশনের ব্যাসিক বেশ সহজ একটা আলোচনা কিন্তু বাস্তবতা এতো সহজ না। বাস্তব জীবন সব জটিল ফাংশনে ভরা। যত জটিল জিনিস তত সুন্দর!!

গণিতের সব কিছুই বাস্তব জীবনের সাথে মিলে যায়। আমাদের বাস্তব জীবনে এবং রসহ্যময় বিশ্বপ্রকৃতিতে হাজারো জটিল কঠিন সম্পর্ক থাকে সেগুলোর সবই ফাংশন। একটা সম্পর্ক বা অন্বয় ফাংশন হবেই এমন কোনো কথা নেই। ব্যাপারটা একটু উদাহরন দিয়ে বোঝানো যাক।

রিলেশন আর ফাংশন(Relation and Function)

যেহেতু পাঠকেরা মোটামুটি সবাই টিনেজার কাজেই একটু প্রেমের গল্প শোনাই। আশাকরি ভালোই লাগবে।

একটা ছেলে মেয়ে যখন একটা সম্পর্কের মধ্যে থাকে তাদের দুই পক্ষেরই অনেক যত্ন নিতে হয় সম্পর্কের প্রতি। কারো একটু অবহেলা সম্পর্কটাকে একদম নষ্ট করে দিতে পারে। বন্ধুত্ব,ভালোবাসা যে সম্পর্কই হোক টিকে থাকার জন্য চাই পরস্পরের প্রতি বিশ্বাস। যদি এই জিনিসটা না থাকে যত মজবুত সম্পর্কই থাক টিকে না। একটা সম্পর্কের মধ্যে থাকা কখনোই সহজ কাজ না। এর অর্থ কি জানো কারো মনের মতো করে চলা,কারো মনের মতো হওয়া,অনেক অনেক দায়িত্ব-কর্তব্য আর সহ্য করার ক্ষমতা। একটা রিলেশন (গণিতেও রিলেশনই বলা হয়) তখনই বাস্তব হয় বা স্বার্থক হয় যখন দুইজন মানুষ পরস্পরের সাপেক্ষে আপেক্ষক হয়ে চলতে পারে। কথাটা আরেকটু ক্লিয়ার করি ধরো একটা ছেলে সব সময় একটা মেয়ের মনের মতো হয়ে চলে,তার জন্য নিজের সবটা দিয়ে দিতে প্রস্তুত এক কথায় যাকে বলে চলকের জন্য ফাংশন যেভাবে বিভিন্ন মানের হয়ে যায় ঠিক সেই রকম। কিন্তু এতো কিছুর পরেও দেখা যায় ওপাশ থেকে আসতে পারে অবহেলা,একজনের জন্য আপেক্ষক হয়ে যাওয়ার পরেও দেখা যায় ওপাশের মানুষটার

সামান্যতম দূর্বলতা নেই। সামান্য কোনো কারনে মূল্যহীন হয়ে যায় সবকিছু ওপাশ থেকেই চুকে যায় সম্পর্ক। গণিতেও এমন হয়! একটু পরে বোঝাচ্ছি। চলো একটু উদাহরন দিয়ে বোঝানো যাক। এবারের উদাহরনটা একটু বেশি বাস্তববাদী করার চেষ্টা করবো।

এতোক্ষণ যা বুঝালাম সেই অনুযায়ী, "ফাংশন হলো এমন একটা অন্বয় বা সম্পর্ক যেখানে দুইজন গাণিতীক জগতের বাস্তব জিনিস সম্পর্কটাকে টিকিয়ে রাখে"

গাণিতীক অন্বয় কেমন জিনিস একটু গাণিতীক ভাবে বুঝানো যাক।

ধরো, $y = 2x + 3$

x ⟶	y=2x+3
1 ⟶	5
2 ⟶	7
3 ⟶	9
4 ⟶	11

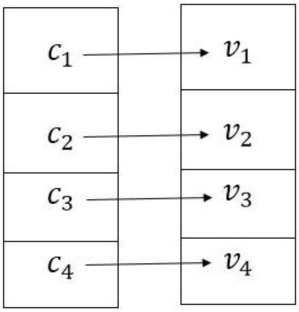
এখানে y আর x এর মধ্যে একটা সম্পর্ক দেখিয়েছি। x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর বিভিন্ন মান পাওয়া যায়। এখানে x এর মান গুলোকে বলা হয় ডোমেন আর y এর মান গুলোকে কোডোমেন । এখন পর্যন্ত কিন্তু এটা একটা সম্পর্ক এই সম্পর্ক ফাংশন হতেও পারে নাও পারে। যদি ফাংশন হয় তখন কোডমেনকে আবার রেঞ্জ বলা হয়। চলো বিষয়টা আরো ক্লিয়ার করা যাক।
বাস্তব জীবনে যে ঘটনা ঘটা সম্ভব বা যে ধরনের সম্পর্ক আসলেই থাকা সম্ভব তাকেই কেবল ফাংশন বলা যায়। গাণিতীক ফাংশনে সম্পর্ক থাকে ডোমেন রেঞ্জের মধ্যে। বাস্তব জীবনেও একটা ঘটনায় পরস্পর সম্পর্কিত দুইটা বিষয়কে ডোমেন রেঞ্জ ধরে একটু ক্লিয়ার করার চেষ্টা করা যাক। তার আগে মনে করিয়ে দেই, একটা ফাংশন $f(x)$ । সেই ফাংশনের ডোমেন মানে যেগুলোর জন্য আসলেই ফাংশনটা সঙ্গায়িত হয় সেগুলোর সংগ্রহ। ওই ডোমেনের একটা উপাদান x_1 হলে রেঞ্জ $f(x_1)$ এটা তো ক্লিয়ার।
এখন বাস্তব জীবনে একটা ঘটনা ঘটছে তা হলো কিছু সংখ্যক গাড়ি একটা প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহন করছে যাকে কার রেস বলা হয়। প্রতিটা রেস কারের একটা বেগ আছে তাই না? কিন্তু যদি কোনো গাড়ির বেগ না থাকে,শুধু ট্র্যাকের উপর দাঁড়িয়ে থাকে তাহলে ওই গাড়ি প্রতিযোগিতার অন্তর্ভুক্ত হবে না। এখানে গাড়ি গুলোকে আমরা ধরে নিচ্ছি ডোমেন আর তাদের বেগকে ধরে নিচ্ছি রেঞ্জ। এবার এদের মধ্যে বেশ কিছু ধরনের সম্পর্ক তৈরী করা যাক।

আমরা এখানে ফাংশনের ডোমেন অর্থাৎ, গাড়ি গুলোকে নির্দেশ করবো

c_1 (১ নম্বর গাড়ি), c_2 (২ নম্বর গাড়ি), c_3 (৩ নম্বর গাড়ি), ... আসল রেসে যেমন প্রতিটা গাড়ির গায়ে নম্বর লেখা থাকে ঠিক সেইরকম।

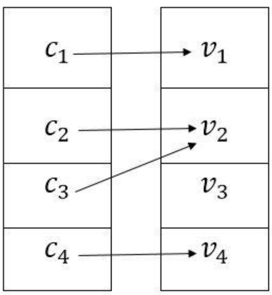
আর আমাদের রেঞ্জ হিসেবে আছে গাড়ির বেগ সেগুলো এভাবে নির্দেশ করবো, V_1 (১ নম্বর গাড়ির বেগ), V_2 (২ নম্বর গাড়ির বেগ), V_3 (৩ নম্বর গাড়ির বেগ), ...এভাবে

ছবিতে গাড়ি আর তাদের বেগের মধ্যে সম্পর্ক দেখানো হলোঃ



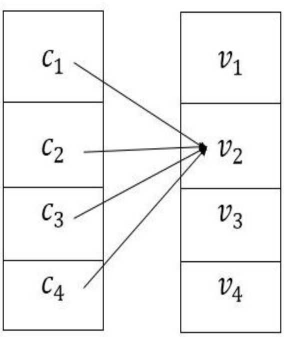
প্রথম ছবিতে দেখানো হচ্ছে কিছু গাড়ি প্রতিযোগিতায় অংশ নিচ্ছে এবং তাদের প্রত্যেকের একটা নির্দিষ্ট বেগ রয়েছে। খুব সুন্দর ভাবেই প্রতিযোগিতাটা সম্পন্ন হচ্ছে। এমন ঘটনা অহরহ ঘটে। কাজেই ফাংশনের ডোমেন রেঞ্জের মধ্যে এমন সম্পর্ক থাকলে তা অবশ্যই ফাংশন হবে। একই সাথে এখানে ফাংশনের একটা ডোমেনের জন্য রেঞ্জের একটা মান পাওয়া যাচ্ছে কাজেই এটা একটা এক-এক ফাংশন।

ছবি-১



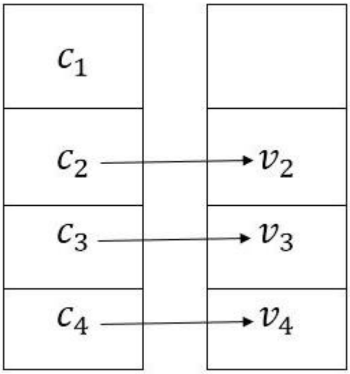
দ্বিতীয় ছবিতে দেখানো হচ্ছে ৩ এবং ৪ নম্বর গাড়িটা একই বেগে চলছে। একটা রেসে এমন ঘটনা খুব একটা বিচিত্র না এটাও একটা ফাংশন। তবে এই ফাংশনকে আগের মতো এক-এক ফাংশন বলা যাবে না।

ছবি-২



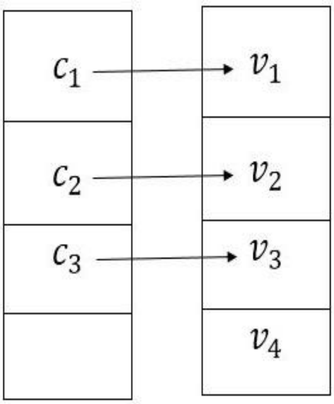
এখানে দেখানো হচ্ছে প্রতিটা রেস কারই সমান বেগে চলছে। এই ঘটনা ঘটাও সম্ভব যদিও তাতে রেসের ফলাফল জানা একটু কষ্টকর হতে পারে। তবে এমন ঘটনা যেহেতু সম্ভব কাজেই ফাংশনের ডোমেন রেঞ্জের মধ্যে এমন সম্পর্ক থাকলে সেটা ফাংশন।

ছবি-৩



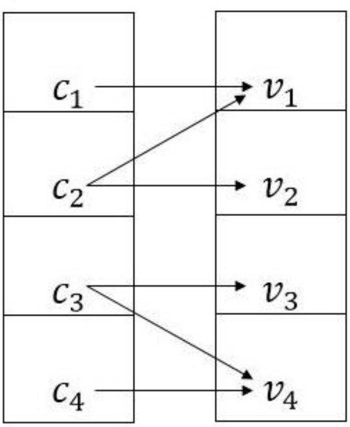
রেস শুরু হয়ে গেছে অথচ ১ নম্বর গাড়ি চলছে না কোনো বেগ নেই,এখনো ট্র্যাকেই উঠে নি। ট্র্যাকে উঠলে নাহয় বেগ ০ লিখা থাকতো তাও নেই। সুতরাং,এটা সম্ভব নয় । ডোমেন রেঞ্জের মধ্যে এমন ঘটনাকে ফাংশন বলা যাবে না।

ছবি-৪



এক্ষেত্রে v_4 বেগে কোনো রেস কার চলছে না। আচ্ছা এমন কোনো রেস আছে যে এই ধরনের শর্ত থাকে অন্তত ১৫০ কিলোমিটার/ঘন্টা বেগে একটা গাড়ি চলতেই হবে। থাকে না কখনোই। তাহলে এই ঘটনাও সম্ভব। ডোমেন রেঞ্জের এমন সম্পর্ককেও ফাংশন বলা যাবে।

ছবি-৫



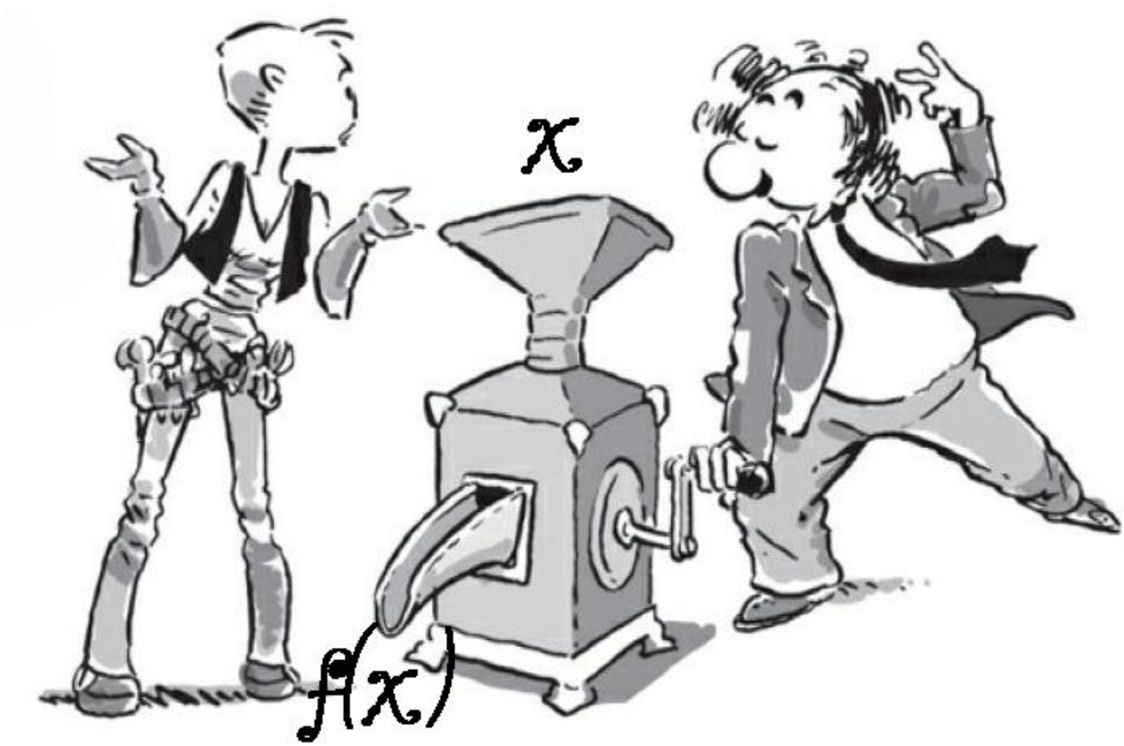
এখানে বলা হচ্ছে ২ নম্বর গাড়ি একই সাথে v_1, v_2 বেগে চলছে আবার ৩ নম্বর গাড়ি একই সাথে v_3, v_4 বেগে চলছে। একই গাড়ি একই সাথে দুইটা ভিন্ন বেগে চলছে। এও সম্ভব মনে হয়? যাইহোক এমন গাজাখুরি ঘটনা সম্ভব না তাই কোনো গাণিতীক সম্পর্কের ডোমেন রেঞ্জের মধ্যে এমন ঘটনা ঘটলে সেটা ফাংশন হবে না।

ছবি-৬

তাহলে বুঝেছো আসল ব্যাপারটা কোনো অন্বয়ে ডোমেনের একটা মানের জন্য যদি রেঞ্জের একাধিক মান পাওয়া যায় বা একদম নাই পাওয়া যায় তাহলে সেই অন্বয় ফাংশন হতে পারে না। বাকি সব ক্ষেত্রে ফাংশন হবে। সিম্পলি যদি এইভাবে ছবি দিয়ে যদি অন্বয় দেখানো হয় তাহলে খেয়াল করতে হবে যেন ডোমেন থেকে কখনোই দুইটা তীর না বের হয়। অথবা এমন ও হওয়া যাবে না যে ডোমেন থেকে কোনো সম্পর্ক নির্দেশক তীরই বের হয় নি।

পরীক্ষায় অহরহ এইরকম ছবি দিয়ে বলা হয় কোনটা ফাংশন আর কোনটা ফাংশন নয়।

যেহেতু x এর জন্য y এর কয়টা মান পাওয়া যাচ্ছে সেটা জানা থাকলেই জানা সম্ভব অন্বয় ফাংশন হবে কিনা তাই আমরা একটা অন্বয়ের গ্রাফ দেখেই বলে দিতে পারবো সেটা ফাংশন হবে কিনা। এই নিয়ে আবার কথা হবে ফাংশনের গ্রাফ চিত্রের অধ্যায়ে।



ফাংশন একটা যন্ত্রের মতো সে একটা ইনপুট নিয়ে ফলাফল দেয়। ধরো একটা ফাংশনঃ $F(x)=2x+3$

তাহলে, $F(<3\ )= 2 <3 + 3$

যদি হয়, $F(ToT\ )= 2\ ToT +3$

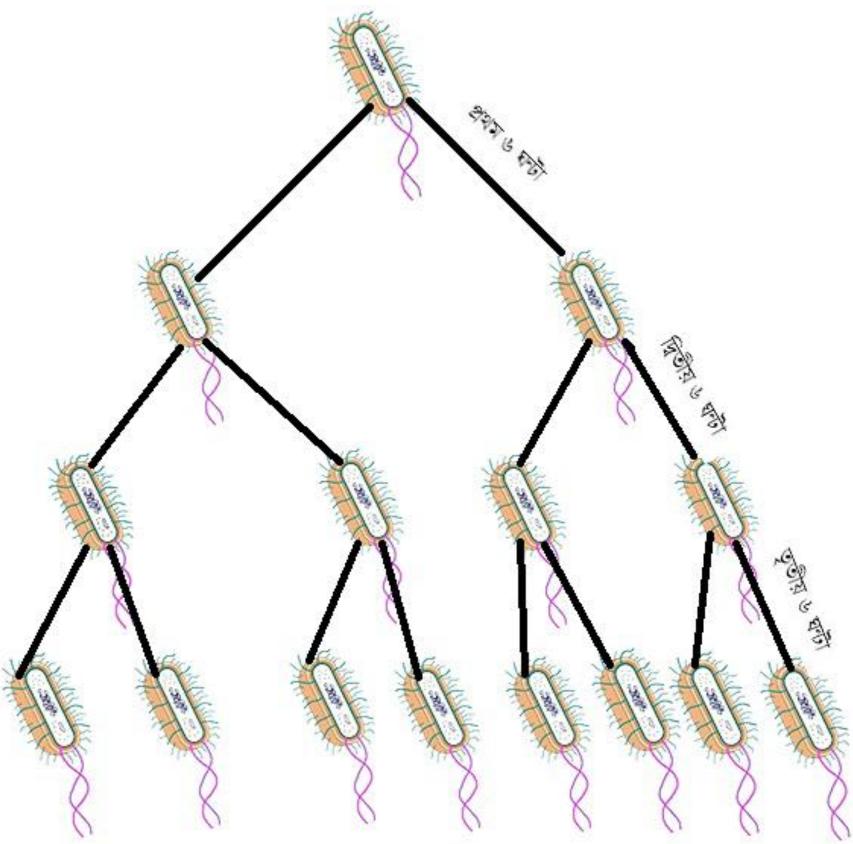
এই রকমের। ক্লিয়ার তো?

আসল কথা বলি সম্পূর্ন গণিতটাই বিচিত্র ধরণের ফাংশনের আলোচনায় ভর্তি।আমরা বিচিত্র রূপের ফাংশন গুলোকে দেখবো একটু একটু করে

সূচক ফাংশন(Exponential Function)

তোমরা বায়োলজিতে পড়েছো ব্যাক্টেরিয়ার বংশ বৃদ্ধি হয় কিভাবে, বাইনারি ফিশন তাই না। মানে একটা কোষ থেকে দুইটা হয়। আবার প্রতিটা কোষ বিভাজিত হয়ে আবার দুইটা হয় এভাবে চলতে থাকে। সেটাও ফাংশন অন্য এক ধরনের ফাংশন।

নিচের ছবিতে ব্যাক্টেরিয়ার বংশ-বৃদ্ধির একটা ছবি দেখানো হলোঃ



মনে করো ব্যাক্টেরিয়ার কোষ একবার বিভাজিত হতে সময় লাগে ৬ ঘন্টা। যদি প্রথমে একটা ব্যাক্টেরিয়া থাকে তাহলে ৬ ঘন্টা পর হবে দুইটা এবার সেই দুইটা নতুন ব্যাক্টেরিয়া যদি আবার প্রত্যেকেই বিভাজিত হয় তাহলে পরবর্তী ৬ ঘন্টায় নতুন ব্যাক্টেরিয়ার সংখ্যা হবে 2×2

আরো ৬ ঘন্টা পর নতুন ব্যাক্টেরিয়া তৈরী হবে $2 \times 2 \times 2$

এভাবে চলতে থাকবে। এখানে একটা জিনিস লক্ষ্য করো ব্যাক্টেরিয়ার সংখ্যা বৃদ্ধি একটা নিয়ম মেনে হচ্ছে তা হলো প্রতি ৬ ঘন্টা পর নতুন জন্মানো ব্যাক্টেরিয়ার সংখ্যার জন্য আগের বারে জন্মানো সংখ্যাকে ২ দিয়ে গুন। মানে শুরু থেকে যত গুলো ৬ ঘন্টা পার হয়েছে তত গুলো ২ এর গুনফল।

ধরো,বলা হলো t সময় পরে নতুন কতো গুলো ব্যাক্টেরিয়া জন্মাবে

ধরা যাক t সময়ে x সংখ্যক ৬ ঘন্টা পার হয়েছে তাহলে শুরু থেকে t সময় পরে নতুন জন্মানো ব্যাক্টেরিয়ার সংখ্যা হলো

$$y = 2^x$$

আবার,মোট সময় $t = 6x \Longrightarrow x = \frac{t}{6}$ [যেহেতু t সময়টা মোট x সংখ্যক 6 ঘন্টা]

লক্ষ্য করো, t আর x একটা সম্পর্ক মেনে চলে অর্থাৎ, t কিন্তু x এর ফাংশন আবার, y আর x একটা সম্পর্ক মেনে চলছে অর্থাৎ,y,x এর ফাংশন

y কে t বা x দুইটার ফাংশন হিসেবেই লেখা যাবে। নিচের মতো করে

$$y = f(x) = 2^x;\ x = \frac{t}{6}$$

$$y = f(t) = 2^{\frac{t}{6}}$$

আবার,x=$f(t)$ লেখা যাবে তাহলে y=$2^{f(t)}$

বেশ মজার জিনিস কিন্তু ফাংশনের ভেতর ফাংশন। এটাকে বলা হয় ভিতর ফাংশন।

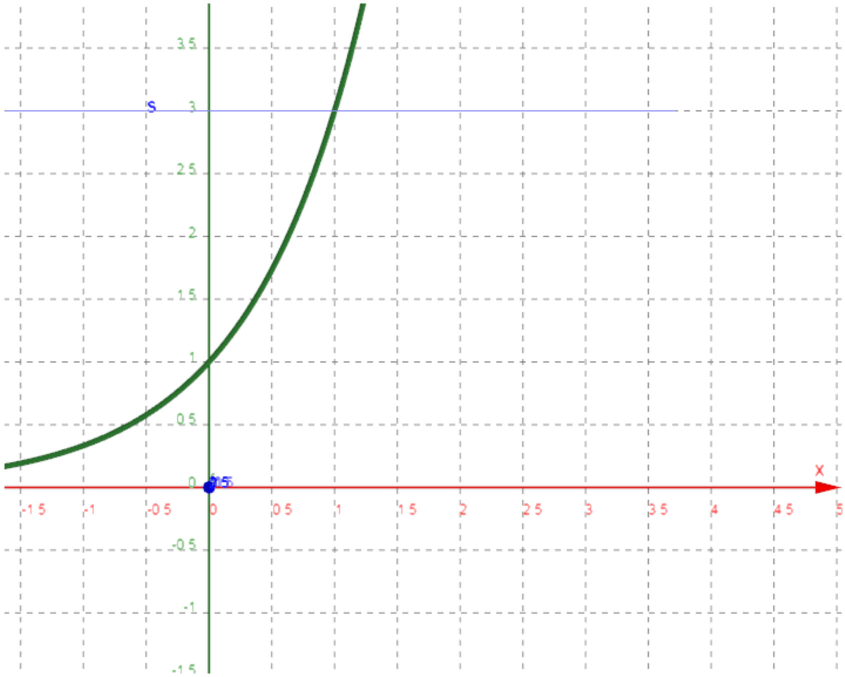
এখানে একটা জিনিস লক্ষ্য করো ফাংশন ব্যবহৃত হচ্ছে ঘাত হিসেবে এজন্য এই ধরনের ফাংশনকে বলা হয় এক্সপোনেনশিয়াল ফাংশন *Exponential Function*

এবার একটা *Exponential Function* এর জন্য অনুরূপ টেবিল তৈরী করা যাক।

ধরো ফাংশনটা $y = 3^x$

x	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
y	*3*	*9*	*27*	*81*	*243*

মনে আছে এর আগের বার কথা বলার সময়ের হিসাব করার সময় কতো মিনিট কথা বলা হয়েছে সেটা থেকে কত খরচ হবে তা যেমন বের করেছিলাম একই সাথে আবার কত টাকা খরচ হয়েছে তা থেকে কতো মিনিট কথা বলা হয়েছে সেটাও বেশ সহজেই বের করতে পেরেছিলাম এবারের ফাংশনটা x থেকে y এ বর্ণিত x এর মান জানলে সেটা 3 এর মাথায় বসিয়ে সহজেই y বের করা যায় কিন্তু y থেকে x কিভাবে বের করবো? তেমন উপায় কি আছে?



তোমাদের হয়তো উপায় জানা আছে কিন্তু আমার নেই অন্তত লিখতে বসে কিছুই মনে পরছে না। কারন আমি চাই তোমাদের সবকিছু পুনঃআবিষ্কারের স্বাদ দিতে!!

আমার মনে পড়ছে গ্রাফের কথা মনে আছে তো গ্রাফে দুইটা সমীকরণের স্কেচ আকো আকলে তারা যে বিন্দুতে মিলে যায় সেটাই হলো তাদের সমাধান।

এবার ধরো আমাদের একটা ফাংশন দেয়া হয়েছে $y = 3^x$ এবার বলা হলো $y=5$ তাহলে x কতো?

আমি গ্রাফ একে এটা বের করার চেষ্টা করছি। দেখো আমার সমীকরণ দুইটা মানে $y = 3^x$, $y=5$ এরা গ্রাফে একটা বিন্দুতে ছেদ করেছে। তার মানে এই বিন্দুতে x এর মান যত 3 এর উপর তত পাওয়ার বসালেই 5 পাওয়া যাবে।

এইযে গ্রাফ করে সমাধান করলাম এই কাজটা সহজে খাতা কলম বা ক্যালকুলেটরে করা হয় যে পদ্ধতিতে তার নাম দেয়া হয়েছে লগ বা লগারিদম।

এতোক্ষণের আলোচনা যদি বুঝে থাকো তাহলে লগারিদম আর কিছুই না কোনো কিছুর উপর ঘাতের মান বের করা।

একটু শুদ্ধ করে সূচক ফাংশনের বিপরীত ফাংশন!!

উপরের ফাংশননের ক্ষেত্রে $3^x = 5$

তাহলে $x = \log_3 5$ ক্যালকুলেটরে দেখতে পারো, $3^{\log_3 5} = 5$

উপরের আলোচনা বোঝার ভিত্তিতে এবার আরো একটা ফাংশন নেয়া যাক $y = a^x$

এইবার বলো x এর মান কতো?

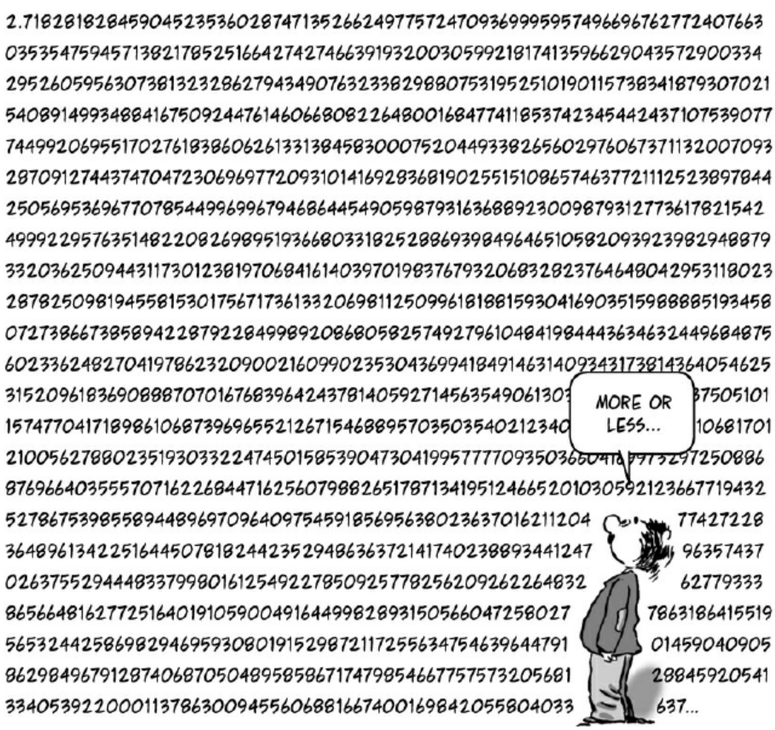
নিশ্চয়ই সবাই বুঝে বলছো $x = log_a y$

এটাকে এভাবে পড়া হয় x সমান লগ a ভিত্তিক y। লগারিদমের ভিত্তি হিসেবে যেকোনো সংখ্যা ব্যবহৃত হতে পারে। তবে একটা বিশেষ অমূলদ রহস্যময় সংখ্যা লগারিদমের ভিত্তি হিসেবে ব্যবহার করলে বেশ কিছু সুবিধা পাওয়া যায়।

সেই সংখ্যাটা হলো e। কেন e হলো অন্য কোনো সংখ্যাও তো হতে পারতো?

আসলে ব্যাপারটা হলো, e এমন একটা সংখ্যা যা যেকোনো সুচকীয় ফাংশনের ভিত্তিরূপে ব্যবহার করে প্রকাশ করলে সেই ফাংশনটাকে অসীম ধারায় বিস্তৃত করা যায় এজন্য মূলত এর এতো কদর এছাড়াও এটার আরো অনেক ব্যবহার আছে। সেগুলো আস্তে আস্তে জানাবো। চলো e নিয়েই একটা গল্প লিখা যাক।

e এর গল্প(The story of e)



চক্রবৃদ্ধি মুনাফা বা সুদের সুদ এই জিনিসটার সাথে মোটামুটি সবাই পরিচিত। বাস্তব অভীজ্ঞতা না থাকলেও অন্তত ক্লাস সিক্স-সেভেনের গণিত বই চক্রবৃদ্ধি মুনাফার সাথে পরিচয় করিয়ে দেবেই!

এই চক্রবৃদ্ধি মুনাফা যেমন টাকার ক্ষেত্রে হিসাব বের করে ঠিক একই ভাবে বাস্তব জীবনেও এই ব্যাপারটা ব্যাপকভাবে জড়িত। যেমন একটা ভাইরাস কণা যখন জীবদেহে প্রবেশ করে মুহূর্তের মধ্যেই আরো শত শত ভাইরাস তৈরী হয় ।ভাইরাসের একটা বিশাল দল তৈরী হয়। এই পুরো দলের প্রত্যেকটা সদস্য থেকে মুহূর্তের মধ্যেই আবার এমন শত শত ভাইরাস তৈরী হতে থাকে এভাবে চলতেই থাকে | ঠিক যেন সুদের সুদ হচ্ছে। প্রকৃতিতে এমন অসংখ্য ঘটনা ঘটে যার প্রত্যেকটার মধ্যেই রয়েছে এমন সূচকীয় বৃদ্ধি। আমার মনে হয় ব্যাংকে চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে হিসাবটা বেশি সহজ হবে,আবার মোটামুটি বাস্তব জীবনের সাথে মিলেও যাবে আমরা সেই ঘটনাতেই যাচ্ছি।

ধরে নিচ্ছি,ব্যাংকে যে আসল রাখা হলো তার পরিমান p *(principal)* এই আসলের উপর নির্দিষ্ট t সময় পর পর r হারে মুনাফা দেয়া হয়। আমাদের হিসাব সহজ করার জন্য এক্ষেত্রে ধরে নিচ্ছি *1* বছর সময় পর পর p টাকার উপর r হারে মুনাফা দিচ্ছে

1 বছর সময়কাল পরে প্রাপ্ত মুনাফার পরিমান I

$$I = pr.1$$

1 বছর শেষে ব্যাংক অ্যাকাউন্টে মোট টাকার পরিমান হবে $C_1 = p + pr$

$$\Longrightarrow C_1 = p(1 + r)$$

দ্বিতীয় বছরের জন্য আসল হবে C_1

তাহলে দ্বিতীয় বছর পরে মোট মুনাফা আসল $C_2 = C_1 r + C_1$

$$\Longrightarrow C_2 = C_1(1 + r)$$
$$\Longrightarrow C_2 = p(1 + r)^2$$

তৃতীয় বছরের জন্য আসল C_2

তৃতীয় বছর শেষে মুনাফা-আসল $C_3 = C_2 + C_2 r$

$$\Longrightarrow C_3 = C_2(1 + r)$$
$$\Longrightarrow C_3 = p(1 + r)^3$$

এভাবে t বছর সময় ধরে চলতে থাকলে ওই সময় পরে মুনাফা-আসল

$$C_t = p(1 + r)^t$$

এই বিষয়টা বেশ সরল প্রকৃতি চলে আরো বেশি কঠিন নিয়মে। নির্দিষ্ট সময়ে শুধু একবার না বার বার হার পরিবর্তন করে বাড়তে থাকে প্রকৃতির বিভিন্ন সূচকীয় ঘটনা |

বিষয়টা কেমন মুনাফা আসলের উদাহরন থেকেই আরো ক্লিয়ার করা যাক আগে এক বছর যাওয়া পর নির্দিষ্ট হারে হিসাব করে মুনাফা দেয়া হত। তার সাথে আসল যোগ করে যত হত সেই পরিমান টাকা আবার পরের বছরের জন্য আসল হিসেবে থাকতো আবার একইভাবে সমান হারে মুনাফা হিসাব করা হতো এভাবে চলতেই থাকে। এবারে আরেকটু জটিল হচ্ছে বিষয়টা প্রতি বছরে শুধু একবার না তার ও বেশি বার সুদের সুদ হিসাব করা হবে!! আর হার কতো দেয়া হবে সেটা হচ্ছে বছরে মোট যে কয়বার মুনাফা হিসাব করা হচ্ছে এক বছরে যে হার ছিল সেই হার ওই সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হবে।

আরেকটু ক্লিয়ার করা যাক ধরো ব্যাংকে একটা সেভিং অ্যাকাউন্ট খুলেছো ব্যাংক বলছে বছরে ১৬% হারে চক্রবৃদ্ধি ইন্টারেস্ট দিবে। তার সাথে আরো একটা কথা বলছে না বছরে শুধু একবার নয় ছয় মাস পর পর ৮% হারে দুইবার চক্রবৃদ্ধি হারে মুনাফা দিবে। মানে এক চক্রবৃদ্ধির মধ্যে আরেক চক্রবৃদ্ধি। প্রকৃতিতে এমনই ঘটে এবং সেটা আর জটিল নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে একটা চক্রবৃদ্ধি আরো

কতোবার চক্রবৃদ্ধিতে বিভক্ত হতে পারে তার কোনো হিসাব নেই। এই চক্রবৃদ্ধিকে কি বলতে পারি জটিল চক্রবৃদ্ধি ব্যাংকের ভাষায় হয়তো *Compound-complex profit* বলা যেতে পারে!!

চলো সরল চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ভিতরে আরেক চক্রবৃদ্ধিতে কি ঘটনা ঘটে সেটা হিসাব করা যাক।আগের বারে সরল চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট সময় সূচক রূপে ছিল সেটা কিন্তু থেকেই গেল। আমরা আরো গভীরের হিসেবে যাচ্ছি এবার।

এবারে আসল p নির্দিষ্ট সময় t এর মধ্যে আবার n বার চক্রবৃদ্ধি হারে বাড়ে | এই বৃদ্ধির হার আবার n সংখ্যক ভাগে বিভক্ত হয়ে যায়। তাহলে প্রতিবারে বৃদ্ধির হার $\frac{r}{n}$

t সময়ে যদি শুধু *1* বারই বৃদ্ধি ঘটে তাহলে সময় শেষে মোট টাকার পরিমান $a_1 = p + p.\frac{r}{1}$

t সময়ে যদি *2* বার বৃদ্ধি ঘটে তাহলে এই দুই বার বৃদ্ধির সময় আবার আরো ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত।

প্রথম অংশ সময় শেষে মুনাফা আসল হবে $b_1 = p + p.\frac{r}{2} \Longrightarrow b_1 = p(1 + \frac{r}{2})$

দ্বিতীয় অংশের বৃদ্ধির জন্য আসল b_1

দ্বিতীয় অংশের সময় শেষে মুনাফা আসলে হবে $b_2 = b_1 + b_1.\frac{r}{n}$

$$\Rightarrow b_1\left(1 + \frac{r}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow b_2 = p\left(1 + \frac{r}{2}\right)\left(1 + \frac{r}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow b_2 = p\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$$

যদি একবছর সময় আবার *3* অংশে ভাগ করা থাকতো এবং ওই নির্দিষ্ট ক্ষুদ্র সময়কালের প্রত্যেকটিতে বৃদ্ধি চক্রবৃদ্ধি হতো তাহলে আবার একই রকম হিসাব তিনবার করতে হতো তারপর পাওয়া যেত ফাইনাল মুনাফা-আসল তাও মাত্র একবছরের

এক্ষেত্রে প্রথম অংশ সময় শেষে মুনাফা-আসল $d_1 = p + p.\frac{r}{3}$

$$\Longrightarrow d_1 = p\left(1 + \frac{r}{3}\right)$$

দ্বিতীয় ক্ষুদ্র অংশের জন্য আসল d_1

দ্বিতীয় ক্ষুদ্র অংশ সময় পর মুনাফা-আসল $d_2 = d_1 + d_1.\frac{r}{3}$

$$\Longrightarrow d_2 = d_1\left(1 + \frac{r}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow d_2 = p\left(1 + \frac{r}{3}\right)^2$$

তৃতীয় ক্ষুদ্র অংশ সময় পর মুনাফা-আসল $d_3 = d_2 + d_2.\frac{r}{3}$

$$\Longrightarrow d_3 = d_2\left(1 + \frac{r}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow d_3 = p\left(1 + \frac{r}{3}\right)\left(1 + \frac{r}{3}\right)^2$$

$$\Longrightarrow d_3 = p\left(1 + \frac{r}{3}\right)^3$$

যদি এমন ঘটনা n সংখ্যক বার ঘটে তাহলে ওইযে নির্দিষ্ট সময় মানে মাত্র এক বছরের মধ্যেই n সংখ্যক বার সূচকীয় হারে বৃদ্ধি ঘটবে। তাহলে এক বছর শেষে মোট মুনাফা আসল হবে

$$d_n = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

আশাকরি একেবারে প্রথমেই ক্লিয়ার না হলেও বার বার বুঝানোর পর এব্যাপারে ক্লিয়ার হয়েছো।

আমরা প্রথমে নির্দিষ্ট সময় t বছরের জন্য সরল চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হিসেব করেছিলাম পরে আবার প্রতি 1 বছর সময়কে আরো ক্ষুদ্র n সংখ্যক ভাগে ভাগ করে জটিল চক্রবৃদ্ধি হিসাব করলাম। এই দুই ক্ষেত্রের সুচকীয় নিয়ম একীভূত করলে p পরিমান আসল জমা রেখে শুরু করলে t সময় [t সময়ের মধ্যে আবার n সংখ্যক বার $\frac{r}{n}$ হারে চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হিসাব করা হয়] শেষে অ্যাকাউন্টে যে টাকা পাওয়া যাবে তার পরিমান

$$C = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

এখানে সূচকীয় বৃদ্ধির মধ্যে আবার সূচকীয় বৃদ্ধি এজন্য দুইটা সূচক গুন হয়েছে আশা করি ক্লিয়ার হয়েছে। যাকে বলে বৃদ্ধির বৃদ্ধি তার বৃদ্ধি আর বৃদ্ধি এভাবে কোনো শেষ নেই এমন এক ঘটনা...

বাংলার ইতিহাসের উমিচাদকে মনে পরে গেল হারামজাদা এত বড় একটা সুদখোর ছিল ভাবা যায়। যদিও লেখা-পড়া কিছুই জানতো না সে। কিন্তু ইংরেজরা তো আছেই কুবুদ্ধি দেয়ার জন্য। তারা নিজ গণিতের মাধ্যমে উমিচাদকে হয়তো সবচেয়ে বেশি সুদ পাওয়ার উপায় শিখিয়েছিল। [এটা ইতিহাসে লেখা কোনো কথা নয়]

তো এখানে বিষয়টা হলো নির্দিষ্ট সময়ের ভিতরে শুধু একবার না অনেক অনেক বার চক্রবৃদ্ধি হারে এবং সবচেয়ে বেশি হারে মুনাফা গ্রহন করতে হবে তাহলেই পাওয়া যাবে সবচেয়ে বেশি সুদ!! এটাই হয়তো শেখানো হয়েছিল উমিচান্দকে

আপাতত উমিচাদের লক্ষ্য কিভাবে লোকদের টাকা ধার দিয়ে সর্বোচ্চ পরিমান মুনাফা লাভ করা যায়। আমি তোমাদের বোঝাচ্ছি। তবে মনেকরো, আমাদের এবারের ব্যাংক জমা রাখা আসলের উপর বছরে n সংখ্যক বার চক্রবৃদ্ধিহারে মুনাফা দেয় তাহলে এবারে নির্দিষ্ট t বছর পরে মুনাফা-আসল নির্নয়ের সূত্রটা হবে,

$$\mathrm{C} = \mathrm{p}(1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

দেখা যাচ্ছে অ্যাকাউন্টে মোট কতো টাকা হবে তা নির্ভর করছে আসল আর সময়ের উপর বাকি কয়েকটা জিনিস ধ্রুবক আমরা হিসেবের সুবিধার্থে শুধু ধ্রুবক জিনিস গুলোকে হিসাব করে দেখি আপাতত ধরে নিচ্ছি P=1,t=1 year

যেহেতু আমরা সর্বোচ্চ পরিমান মুনাফার খোজে বের হয়েছে হারামজাদা উমিচাদ। তাই ধরে নিচ্ছি সে সর্বোচ্চ পরিমান অর্থাৎ ১০০% হারে মুনাফা নিবে এক্ষেত্রে, r=1

সরলীকৃত সমীকরণ দাড়ালো, $\mathrm{C} = \mathrm{p}((1 + \frac{1}{n})^n)^t$

$(1 + \frac{1}{n})^n$ *এই অংশটা কিন্তু ধ্রুব বছরে বিভিন্ন সংখ্যকবার চক্রবৃদ্ধি মুনাফার সর্বোচ্চ কত বেশি হতে পারে দেখে আসা যাক*

***n* এর মান (বছরে কতোবার চক্রবৃদ্ধি হারে মুনাফা দেয়া হয়)**		**প্রাপ্ত ধ্রুবকের মান $(1 + \frac{1}{n})^n$**
বছরে	*n=1*	*2*
প্রতিমাসে	*n=12*	*2.613035*
প্রতি সপ্তাহে	*n=52*	*2.692596*
প্রতিদিন	*n=365*	*2.714567*

প্রতি ঘন্টায়	*n=8760*	*2.718127*
প্রতি মিনিটে	*n=525600*	*2.718279*
প্রতি সেকেন্ডে	*n=31536000*	*2.718282*

একটা ব্যাপার খেয়াল করো আস্তে আস্তে চক্রবৃদ্ধি হারে যত বেশি বারই মুনাফা দেয়া হোক না কেন মুনাফার পরিমান শুধু যে বাড়তেই থাকবে তা কিন্তু না। এই বৃদ্ধির একটা সীমা আছে টেবিলের দিকে তাকালে দেখতে পাবে এই বৃদ্ধির পর্যায় একটা নির্দিষ্ট সংখ্যায় সীমিত তা হলো *2.718282...* এটা আর কেউ নয় আমাদের রহস্যময় e

$(1+\frac{1}{n})^n$ এই রাশিটিতে n এর মান অসীমের দিকে গেলে প্রকৃত হিসাবটা একটা নির্দিষ্ট মানের দিকে পৌছায় সেটাই গাণিতীক ধ্রুবক e

এবার আমাদের হিসেবে P আর t ফেরত এনে সহজেই বলতে পারি কাউকে টাকা ধার দিলে নির্দিষ্ট পর্যায়কাল (t) অতিবাহিত হওয়ার পর ওই সুদখোর সর্বোচ্চ যে পরিমান টাকা জমা হতে পারে তার পরিমান

$$C = pe^t$$

এভাবেই হয়তো সুদ নিতো ঐ উমিচাদ। যাহোক সে গল্প এখন থাক। এবার যাবো গণিতে...

আরো একটু পরিষ্কার করা যাক, $(1+\frac{1}{n})^n$ এই রাশিতে n এর মান যদি অসীমের দিকে যায় তাহলে সেটা প্রকাশ করা হয় এভাবে, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

$n \to \infty$ এটাকে পড়া হয় n Tends to Infinity এভাবে। এটা কিন্তু চমৎকার একটা ধারণা একটা রাশির চলককে ইচ্ছে মতো বারালে সেটা কেবল একটা নির্দিষ্ট মানের কাছাকাছি যেতেই থাকে ,একে বলা হয় লিমিট বা সীমা। লিমিট নিয়ে আবার পরে আলোচনা হবে।

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ একে দ্বিপদী উপপাদ্য দ্বারা বিস্তৃত করে ফেলা যায় এভাবে,

$(1+x)^n$ কে বিস্তৃত করলে হয়,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots$$

$(1+\frac{1}{n})^n$ এই রকমের বিস্তৃতিতে যদি n এর মান অসীম হয়ে যায় তাহলে বিস্তৃতিটা হবে এইরকমঃ

$$1 + \frac{n\frac{1}{n}}{1!} + \frac{n(n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3!} + \cdots \text{ অসীম পর্যন্ত}$$

$$= 1 + \frac{n\frac{1}{n}}{1!} + \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2!} + \frac{n^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3!} + \cdots$$

যেহেতু n এর মান অসীম তাও আবার ধণাত্বক মানে $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$

তাহলে সম্পূর্ন বিস্তৃতিটা দাঁড়াবে, $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ এটা আর কিছুই না e অয়লার ধ্রুবক e বলতে পারো আবার প্রাকৃতিক লগারিদমের ভিত্তি e বলতে পারো। গণিতের অন্যতম প্রধান ধ্রুবক e বলতে পারো। শুরু করার আগে এই জিনিসটার সাথে পরিচয় খুব দরকারি ছিল

e= 2.718281828...

এই e হলো প্রাকৃতিক ধ্রুবক। যখন চক্রবৃদ্ধি মূলধনের হিসাবটা বুঝাচ্ছিলাম তখন কিন্তু খুব জটিল সূচকীয় বৃদ্ধি নিয়ে কাজ করছিলাম। প্রকৃতিতে সব বৃদ্ধি এমন জটিল নিয়ম মেনেই ঘটে। তাই প্রকৃতির সব চক্রবৃদ্ধির সাথে অঙ্গা-অঙ্গিভাবে জড়িত ধ্রুবক e

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ *থেকে পেয়েছি* e

যদি বিস্তৃতিটা এমন হতো $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{nx}$ তাহলে আসতো

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

এতোক্ষণ তো e *এর পরিচয় দিলাম দেখলে* e^x কে একটা সুন্দর অসীম ধারায় বিস্তৃত করা যায়,গণিত এই অসীম ধারা জিনিসটাকে বেশ পছন্দ করে । এজন্যই e জিনিসটা গণিতে বেশ দামী!! লগারিদমের ভিত্তি হিসেবেও e কে ব্যবহার করা হয় যখন কোনো লগারিদমের ভিত্তি e তখন সেটাকে প্রাকৃতিক লগারিদম (Natural Logarithm) বলে।

$\log_e x$ *কে লিখা হয়* lnx

সূচক আর লগারিদম (Exponent and logarithm)

আমি জানি না কারা এই বইটা পড়ছে তবে যারা পড়ছে। এমন ও কেউ হয়তো আছে যারা ক্লাস নাইন-টেন অতিক্রম করে এসেছে অধ্যায়-৪ এ সুচক ও লগারিদম নামে অধ্যায়টাও করে এসেছে কিন্তু এই সূচক ফাংশনের সৌন্দর্যটা অনুভব করতে পারে নি। অনেকেই হয়তো অনেক দক্ষ আছেন তারা এ বিষয় গুলো জানে। আমি জানি না কতোটুকু সুন্দর ভাবে তোমাদের সামনে গণিতকে উপস্থাপন করছি কিন্তু বিশ্বাস করো মহাজগতের সব সৌন্দর্যের পিছনে রয়েছে গণিত।

সূচকের গণিত গুলো আশা করি সবাই জানো। নিচে এই সূচক ফাংশন যে সহজ নিয়ম গুলো মেনে চলে সেগুলো দেয়া হলঃ

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy},$$

$$(((a)^x)^y)^z = a^{xyz}$$

$$(a^x)^{\frac{1}{y}} = a^{\frac{x}{y}}$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_a b = \log_c b \times \log_a c$$

$$\Rightarrow \frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$$

$$\Rightarrow \frac{lnb}{lnc} = \log_c b$$

আমি কিন্তু ভুলে যাই নি আমি ক্যালকুলাস পড়াচ্ছি। কিন্তু এই জিনিসগুলো দরকার হবে তাই শিখিয়ে নেয়া

এই সূত্র গুলো কিন্তু মুখস্ত করার জন্য দেয়া হয় নি কেউ ভুলেও সেটা করতে যাবে না। এখন সূত্র গুলো প্রমাণ করে ফেলবো।

সূত্র গুলো প্রমাণের শুরুতে ধরে নিচ্ছি,

$\log_a b = x$

$\Longrightarrow a^x = b \ldots\ldots\ldots (i)$

$\log_a c = y$

$\Longrightarrow a^y = c \ldots\ldots\ldots (ii)$

$\log_c b = z$

$c^z = b \ldots\ldots\ldots (iii)$

(i)$\times$ (ii)

$a^x a^y = bc$

$\Longrightarrow a^{x+y} = bc$

$\Longrightarrow x + y = \log_a bc$

$\Longrightarrow \log_a b + \log_a c = \log_a bc$

(i)$\div$ $(ii) \Longrightarrow$

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c}$$

$$\Longrightarrow a^{x-y} = \frac{b}{c}$$

$$\Longrightarrow x - y = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\Longrightarrow \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

(iii)$\Longrightarrow$ $c^z = b$

এবার (i) ও (ii) নম্বর সমীকরণের সাহায্য নিয়ে নিচের কাজটা করে ফেল। ব্যাস!!

$\Longrightarrow (a^y)^z = b$

$\Longrightarrow a^{yz} = a^x$

$\Longrightarrow x = yz$

$\Longrightarrow \log_a b = \log_c b \times \log_a c$

$$\Longrightarrow \frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$$

এবার a *এর জায়গায় ভিত্তি* e *ধরে লিখতে পারি,*

$$\Longrightarrow \frac{lnb}{lnc} = \log_c b$$

মনে আছে তো, $log_e b = lnb$ লিখা হয়

এই জিনিসগুলো এমনি এমনি শিখাচ্ছি না যখন আসল ক্যালকুলাসে যাবো তখন দেখবা,a^x জাতীয় জিনিসকে অসীম ধারায় বিস্তৃত করার প্রয়োজন পরবে। অতি সহজেই এই কাজটা এখন পারবে(যদি বুঝে থাকো)

নিজে চেষ্টা করো...

আমি নিচে করে দিচ্ছি

ধরো,$y = a^x$

$$\Rightarrow x = \log_a y$$
$$\Rightarrow x = \frac{lny}{lna}$$
$$\Rightarrow lny = xlna$$
$$\Rightarrow y = e^{xlna}$$

$$\boxed{a^x = e^{xlna}}$$

এবার,সহজেই লিখে দিতে পারো,

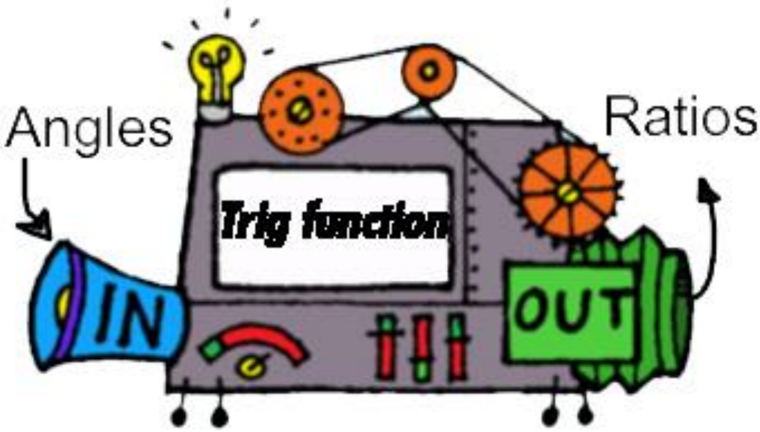
$$a^x = e^{xlna} = 1 + \frac{xlna}{1!} + \frac{(xlna)^2}{2!} + \frac{(xlna)^3}{3!} + \cdots$$

এই নিয়মে ২ কে অসীম ধারায় বিস্তৃত করা যায় এভাবে,

$$2^1 = e^{ln2} = 1 + \frac{ln2}{1!} + \frac{(ln2)^2}{2!} + \frac{(ln2)^3}{3!} + \cdots$$

এভাবে তোমরা যা ইচ্ছা করো আমি আসল ক্যালকুলাসের দিকে আগাচ্ছি।

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বা বৃত্তীয় ফাংশন(Trigonometric Funtion)



ত্রিকোণমিতিক ফাংশন আগে থেকেই শিখে এসেছো। এরপরেও ক্যালকুলাসে যখন প্রথম একটা ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরীকরন বের করতে বলা হয় তখনই অনেকেরই সূত্র দেখে বড়-সড় ধাক্কা লাগে(যারা ত্রিকোণমিতি না শিখে যায়)

এগুলো আসে সমকোণি ত্রিভুজের তিনবাহু দিয়ে তৈরী ছয় রকমের অনুপাত থেকে। আমি মনেই রাখতে পারতাম না এভাবে মনে রাখতাম

সাগরে(sin)= লবণ(লম্ব) আছে(অতিভূজ)

কবরে(cos) =ভূত(ভূমি) আছে(অতিভূজ)

ট্যারা(tan),=লম্বা(লম্ব) ভূত(ভূমি)

ওই প্রথম অক্ষর গুলো দিয়ে কোনটা কি বুঝানো হয় বুঝেছো তো?আর মাঝে একটা ভাগ চিহ্ন ধরে নাও এগুলো জাস্ট নাম দেয়া হয়েছে সাধারণ সমাবেশ বিন্যাসের নিয়ম থেকে ৩ বাহু ব্যবহার করে এই ৬ অনুপাত পাওয়া যায় তাদের জাস্ট একটা করে নাম দেয়া হয়েছে নাম গুলোর অর্থের মধ্যেও তেমন কিছুই নাই আসলে তাই সেগুলো ঘেটে সময় নষ্ট করতে যাবো না।

যে তিনটা অনুপাত উপরে আছে এগুলোকে উলটে দিলে আরো তিনটা পাওয়া যায় এই তিনটাকে বলা হয়

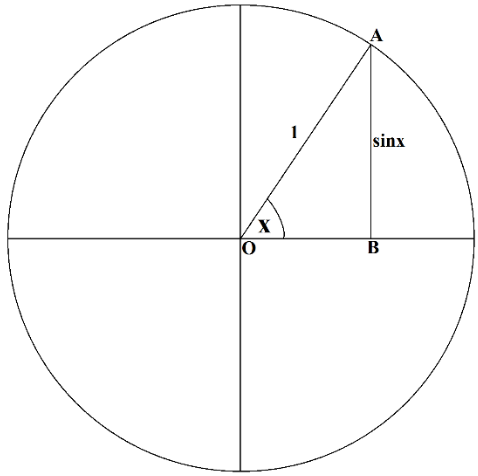
সাইনের বিপরীতে কোসেক

কোসাইনের বিপরীতে সেক

আর ট্যানজেন্টের বিপরীতে কোট্যানজ্যান্ট

আজ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে একটু নতুনভাবে পরিচয় করিয়ে দিবো সেটা হলো এটা বৃত্তীয় ফাংশন কেমনে

তোমরা সবাই জানো sine হলো লম্ব আর অতিভূজের অনুপাত।



এই ছবিতে বৃত্তের ব্যাসার্ধ r=1 বৃত্তের ব্যাসার্ধকে ইচ্ছে মতো ঘুরানো যায় বৃত্তের কেন্দ্রে(O বিন্দু) একটা হাতলের মাধ্যমে এই ঘোরা নিয়ন্ত্রিত

অতিভূজ=l তাহলে ব্যাসার্ধকে যদি x কোণে ঘুরিয়ে আনি তাহলে এটা পরিধির উপর একটা বিন্দুতে অবস্থান নেবে সেই বিন্দুটা A

A বিন্দু থেকে ব্যাসার্ধের উপর AB লম্ব আকলে দাড়ালো OA=r=1

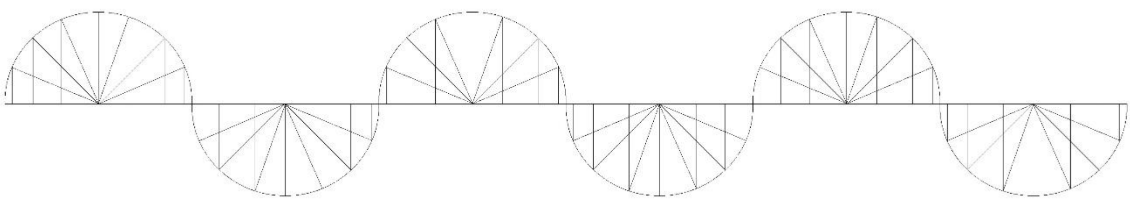
sinx=লম্ব/অতিভূজ=$\frac{AB}{OA} = \frac{AB}{r}$

$AB = r\sin x$

r=1 হলে AB এর দৈর্ঘ্য আর কিছুই না আসল sinx

এবার কল্পনা করো তুমি বৃত্তের কেন্দ্রের ওই হাতলটা ঘুরাচ্ছো নিচে আছে একটা কাগজের শিট বৃত্তের ব্যাসার্ধের প্রান্তে এমন এক ব্যবস্থা আছে যেদিক দিয়ে ঐ অংশটা যাচ্ছে সেখানে একটা কালো দাগ একে দিচ্ছে।

একই সাথে আরো একটা ঘটনা ঘটছে কাগজের শিটটা ট্রেডমিলের মতো একটা গতিতে চলছে মানে শিটটা ডান থেকে বাম দিকে যাচ্ছে। ফলে যে দাগটা পরছে সেটা কাগজের একই জায়গায় বারবার পরছে না। দাগটা একটা সুন্দর ঢেউ একে ফেলেছে। দেখো তোমার কল্পনার সাথে নিচের ছবিটা মিলে কিনা (একটা এনিমেটেড ছবিতে এই জিনিসটা আরো ভালো ভাবে দেখানো হয়েছে)



চিত্রে আকা লম্বগুলো আসলে sinx এর মান তোমার হাতল ঘুরানোর সাথে সাথে x এর মান বাড়ছে। এভাবে যে বক্ররেখাটা পাওয়া গেল সেটা sinx এর গ্রাফ।

আবার আগের বৃত্তে ফিরে যাও এবার বের করবো cosx

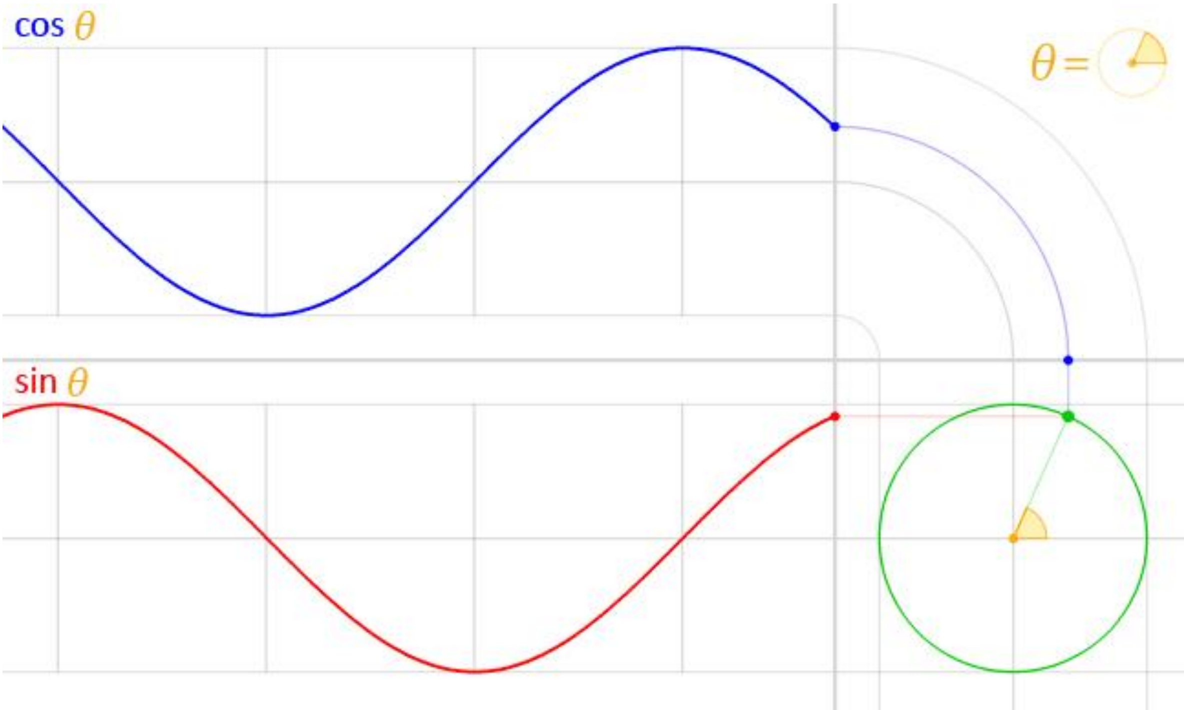
cosx=ভূমি/অতিভূজ=OB/OA=OA/r

এবার যদি r=1 হয় তাহলে oA আর কিছুই না আমাদের পরিচিত cosx

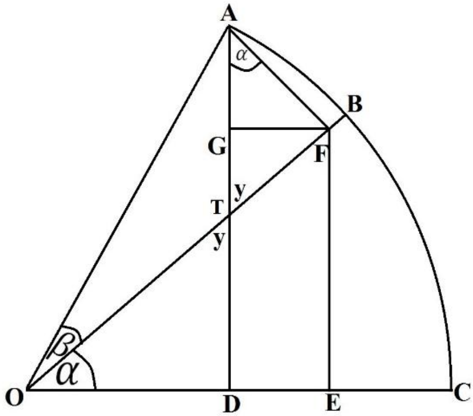
OA=rcosx

Cosx এর লেখচিত্রটা কিভাবে পাওয়া যাবে সেটা তোমরা বের করো। আপাতত খাটা-খাটুনি ভালো লাগছে না।

তোমরা চাইলে ছবিটা নেট থেকে দেখে এসো লিংকটা **এখানে** । আশা করি এই এনিমেটেড ছবিটা দেখলে বুঝতে পারবে সাইন আর কস কি জিনিস কিভাবে তৈরী হয় সাইন আর কস অনুপাতের গ্রাফ



এখন যাবো আসল কাজের দিকে যেটা ক্যালকুলাসে লাগবে। যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করার কাজটা এতোদিন আমরা সরল sinx কিংবা sinα দেখে এসেছি এবার যদি sin(α+β) অথবা sin(α-β) এই ধরনের জিনিস আসে তাহলে কি করবো? এটার জন্য সহজ কিছু গণিত ব্যবহার করে একটা কাজ করা যাকঃ



মনে করো, O বিন্দুকে কেন্দ্র করে r এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বিন্দু মুক্ত ভাবে ঘুরতে পারে সে মোট ($\alpha+\beta$) পরিমান ঘুরেছে শুরুতে অবস্থান বিন্দু ছিল C এবং একটা সুন্দর বৃত্তচাপ তৈরী করেছে যখন α কোণ পরিমান ঘুরেছে তখন চাপের উপর একটা বিন্দু নির্দিষ্ট করে দেয় B আবার β পরিমানে ঘুরে এবং A বিন্দুতে অবস্থান নেয়

তাহলে OA=r ঘুর্ননের ফলে তৈরী কোণ হল ($\alpha+\beta$)

এবার আমরা $\sin(\alpha+\beta)$ বের করতে চাই মানে A বিন্দু থেকে C বিন্দুর উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য বের করতে চাই।

এজন্য কিছু কাজ করে নিচ্ছি,

১। A বিন্দু হতে OC এর উপর লম্ব AD আকি

২। Aবিন্দু হতে OB এর উপর লম্ব AF আকি

৩। F বিন্দু হতে AD এর উপর লম্ব GF এবং OC এর উপর লম্ব EF আকি

এবার দেখো, ছবিতে ΔFAT এবং ΔTOD এর মধ্যে y একটা বিপ্রতীপ কোণ যারা সমাণ, প্রত্যেকের আরো একটা করে কোণ সমকোণ,এবার বাকি একটা কোণ সমান না হয়ে যাবে কোথায় মানে $<GAF=\alpha$ হতেই হবে ক্লিয়ার

এবার দেখো, $AD=r\sin(\alpha+\beta)$

$AD=GD+AG$

$=EF+AG \qquad [EF=OF\sin\alpha;AG=AF\cos\alpha]$

$=OF\sin\alpha+AF\cos\alpha$

অনেক কষ্টে আকা ছবি আর উপরের আলোচনা থেকে এইটুকু ক্লিয়ার??

আবার ভালো করে ছবির দিকে তাকাও

$OF=r\cos\beta$

$AF=r\sin\beta$

এই দুইটা মান বসিয়ে দিয়ে পাই,

$r\sin(\alpha+\beta)=r\sin\alpha.\cos\beta+r\cos\alpha.\sin\beta$

$\Longrightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta$

এবার, যদি একই ছবি থেকে OD এর মান বের করতে পারো তাহলে $\cos(\alpha+\beta)$ চলে আসবে।

একটু শিখিয়ে দিচ্ছি,

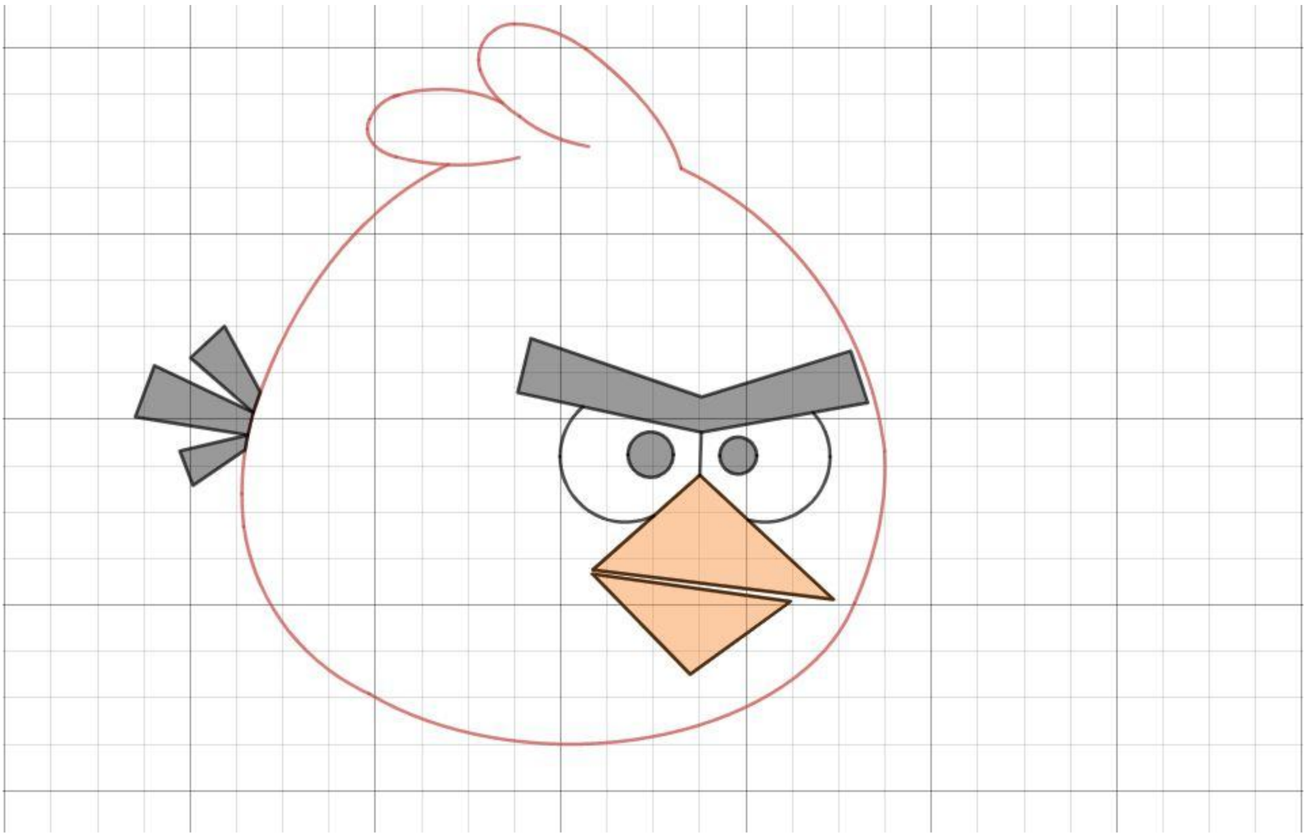
$OD=r\cos(\alpha+\beta)$
$OD=OE-ED \quad [OE=OF\cos\alpha;ED=GF=AF\sin\alpha]$
$\Longrightarrow OF\cos\alpha-AF\sin\alpha$

বাকিটা নিজেরা করো।

এইযে সূত্র গুলো শিখালাম এগুলো ক্যালকুলাসে এবং গণিতের বিভিন্ন অংশে প্রচুর কাজে আসবে। সাইন আর কসের মৌলিক এই দুইটা সূত্র থেকে ত্রিকোণমিতির প্রায় সব গুলো সূত্র তৈরী করা যাবে। পরবর্তী অংশে কাজের জন্য আমি কিছু সূত্র তৈরী করে রাখতে পারি এখনই।

সেই কাজটা আমরা এখানে না করে বইয়ের একদম শেষে আলাদা ভাবে একটা অংশে করবো। কারো দরকার হলে এখনই পরিশিষ্টে গিয়ে দেখে আসতে পারো।

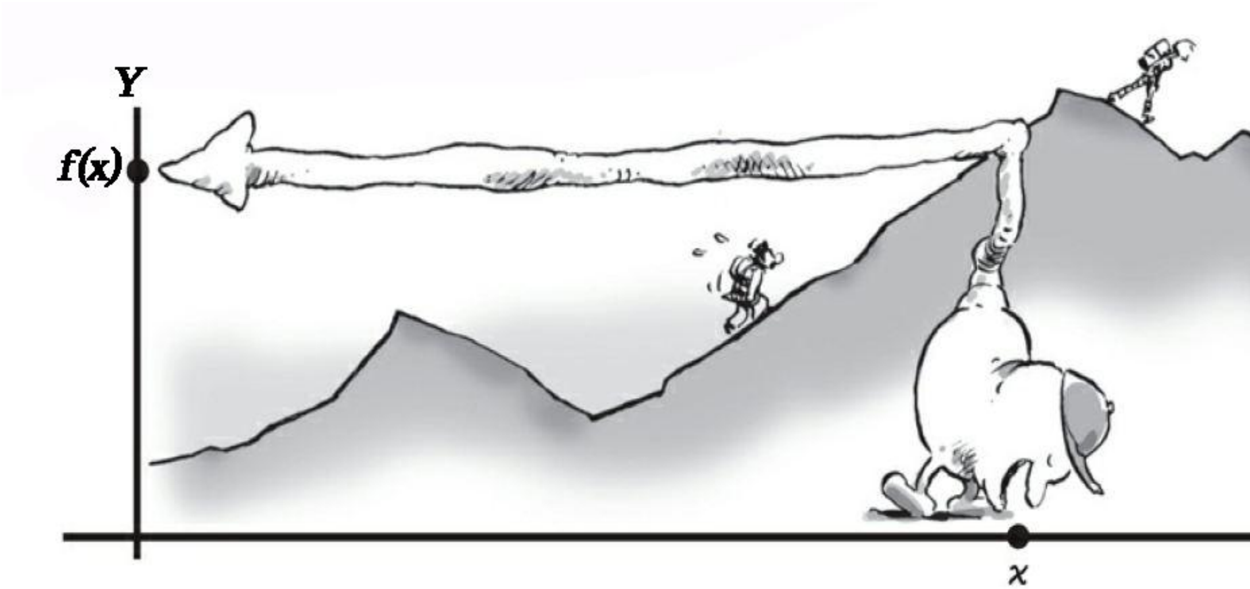
অধ্যায়-৩
সীমা
ও ফাংশনের সোনামুখ



Graph Credit:Atikuzzaman Azad

ফাংশনের সোনামুখ(Golden Face of Function)

আচ্ছা ফাংশনের চেহারাটা কি রকম?আমাদের একটা ফাংশন দিলে কি একে দেখাতে পারবো,অথবা একটা ফাংশন আকা আছে সেটা দেখে বলতে পারবো কোন ফাংশনের ছবি এটা।



ফাংশনকে আকা সম্ভব করেছে আমাদের কো-অর্ডিনেট জ্যামিতি সেখানে আছে x অক্ষ y অক্ষ। চলককে সাধারণত x অক্ষে আর চলকের মান গুলোর জন্য যে আউটপুট পাওয়া যায় সেগুলোকে y অক্ষ বরাবর রেখে ফাংশনের স্কেচ করা হয়। এই নিয়ে এখানে এতো বিস্তারিত বলতে যাবো না। মোটামুটি ক্লাস সিক্স-সেভেনেই এই বিষয়গুলো শিখিয়ে দেয়া হয়ে থাকে।

ছবিতে দেখো ফাংশন x অক্ষ দিয়ে যাচ্ছে আর খাচ্ছে যা খাচ্ছে তার আউটপুট y অক্ষে নির্দেশ করছে একটা রেখার সৃষ্টি করছে। একেক ফাংশন একেক রকমের রাস্তা দিয়ে হাটে,কেউ কেউ হাটতে হাটতে হোচট খায় আকতে পারে না আরো কত রকমের ঘটনা ঘটে ঠিক নেই। এইজন্য বিচিত্র ফাংশনের স্কেচও হয় বিচিত্র।

যেমন এই ছবিতে দেখো ফাংশন একটা পাহাড় একে ফেলেছে!! আমাদের দুইজন আরোহী পাহাড়ে উঠতেও শুরু করেছেন।

এর আগে বলে দিয়েছিলাম ফাংশনের ডোমেন,কো-ডোমেন,রেঞ্জ কি জিনিস

ডোমেন হলো যে মান গুলোর জন্য একটা ফাংশনের সঙ্গায়িত মান পাওয়া সম্ভব। যদি গ্রাফ থেকে সঙ্গাটা দিতে চাই তাহলে বলতে হয় x অক্ষ বরাবর ফাংশন টা যে জায়গা গুলো দিয়ে হাটতে পারবে সেই পথের পুরোটাই ডোমেন।

আর ঐযে ফাংশনের হাটার ফলে y অক্ষে একটা করে মান নির্দিষ্ট হয়ে যাচ্ছে সেগুলো হলো রেঞ্জ অর্থাৎ, যে স্কেচটার সৃষ্টি হবে তার মধ্যে যতগুলো মান আছে সবাই রেঞ্জ।

গ্রাফ থেকে শেখা ডোমেন আর রেঞ্জের সঙ্গাটা হলো,

X অক্ষ বরাবর যে বিন্দু গুলোর উপরে ফাংশনের গ্রাফের অস্তিত্ব আছে তারাই ফাংশনের **ডোমেন**

Y অক্ষ বরাবর গ্রাফে যে বিন্দুগুলো পাওয়া যেছে তার সবই ওই ফাংশনের **রেঞ্জ**

এবার দেখবো বিচিত্র ফাংশনের সব বিচিত্র রূপ। এই মহাবিশ্বে যত শেপ আছে সব আকা যায় ফাংশন দিয়ে।কোন ফাংশন দিয়ে কোন শেপ হবে সেটা একদম পারফেক্টলি বলা না গেলেও শেপটা কেমন হবে আমরা বলতে পারবো। এবার সেই নিয়েই আলোচনা করবো।

আকার-১

$y = ax + b$[a,b বাস্তব সংখ্যা] এই আকারের ফাংশনঃ যদি কোনো দুই চলকের ফাংশনে দেখো চলকের একঘাত আছে বুঝে নিবে সেটা অবশ্যই সরল রেখা হবে।আমরা যে ফাংশনটা লিখেছি সেটাতে a,b এর বিভিন্ন রকমের মান বসিয়ে যতরকমের সরলরেখা হওয়া সম্ভব তার সবই আকা সম্ভব। সেই সরল রেখা কতোটা খাড়া বা কতোটা হেলানো হবে সেটা নির্ভর করবে a এর মানের উপর [কো-অর্ডিনেট জ্যামিতির আলোচনা ধান ভানতে অতিরিক্ত শীবের গান ভালো লাগবে না তাই এই নিয়ে কথা বাড়ালাম না]। এবার একটা জিনিস খেয়াল করো a,b এর মান যদি বাস্তব সংখ্যা হয় তাহলে y এর মান বাস্তব হতে বাধ্য অর্থাৎ, এই ফাংশন x অক্ষের যেকোনো জায়গা দিয়ে চলতে পারবে। সকল বাস্তব সংখ্যাকে মান হিসেবে গ্রহন করতে পারবে এজন্য এর ডোমেন হবে সকল বাস্তব সংখ্যা। বাস্তব সংখ্যাকে আমরা লিখি $\mathbb{R}$ এই ফাংশনের ডোমেন $\mathbb{R}$ আবার y অক্ষেও সকল বাস্তব অংশে বিস্তৃত থাকবে তাই এর রেঞ্জ ও $\mathbb{R}$

আকার-২

$$y = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

এই ফাংশনটাতে x এর ঘাত 1 এর বেশি আছে। যদি এমন ফাংশন হয় তাহলে ফাংশনের গ্রাফ এতো সহজ-সরল থাকে না,ট্যারা-ব্যাকা হয়ে যায়। কেমন হবে সেটা একটু কষ্ট করে https://www.desmos.com/calculator এ দেখে নিও।

এবার আসি আরো একটা কথায় যদি এই ধরনের ফাংশন গুলোতে x এর ঘাত শুধুমাত্র জোড় সংখ্যা হয় তাহলে x এর মান যাই বসানো হোক না কেন ফাংশনের মান সর্বদা ধণাত্বকই হবে। তখন ফাংশনের গ্রাফ কখনোই ঋণাত্বক y অক্ষে বিস্তৃত হবে না। এমন হলে আমরা বলে দিবো এই ফাংশনের ডোমেন বাস্তব সংখ্যা কিন্তু রেঞ্জ হবে ধণাত্বক সংখ্যা। আশাকরি ক্লিয়ার

যদি x এর ঘাত জোড় বিজোড় দুই রকমেরই থাকে তখন ফাংশন ঋণাত্বক y অক্ষেও বিস্তৃত হতে পারে তখন আমরা বলবো রেঞ্জ বাস্তব সংখ্যা।

আকার-৩

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

এই আকারের ফাংশন গুলো প্রায়শই দেখা যায়। এই ফাংশন গুলো x অক্ষের সব জায়গা দিয়ে যেতে পারে না কেননা যাওয়ার সময় কিছু মানের জন্য হর প্রচন্ড ভারী হয়ে যায়। এইজন্য কিছু বিন্দুতে একদম ছিড়েই যায়।

আমরা জানি যদি কোনো ভগ্নাংশের হর শূন্য হয় তাহলে তার মান কতো গণিত জানে না। আমরা বলি অসঙ্গায়িত। অর্থাৎ, এই ধরনের ফাংশন গুলো x অক্ষের সব জায়গা দিয়ে চলতে পারে না আবার y অক্ষের সব জায়গায় বিস্তৃত হতে পারে না।

যদি হরে শূন্য এসে যায় তাহলে ফাংশনটিকে আর সঙ্গায়িত করা যায় না। কাজেই যে মানের জন্য হরে শূন্য আসবে ডোমেনের সঙ্গা অনুসারে সেই মান ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত হতে পারে না।

যেমনঃউপরের ফাংশনে যদি হর শূন্য হয় তাহলে,

$$\mathrm{cx} + \mathrm{d} = 0 \implies \mathrm{x} = -\frac{d}{c}$$

অর্থাৎ, ডোমেন সেটে সকল বাস্তব সংখ্যা থেকে $-\frac{d}{c}$ কে বাদ দিতে হবে। এই টাইপের ফাংশনের ডোমেন হবে $\mathbb{R} - (-\frac{d}{c})$

তাহলে রেঞ্জ সেটটা কি হবে?

এর আগে বিপরীত ফাংশন শিখিয়েছি সেখানে বলেছিলাম কোনো ফাংশনের ডোমেন হলো ওই ফাংশনের বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ।

আর বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ হলো ওই ফাংশনের ডোমেন। এখন যদি এই ফাংশনটার বিপরীত ফাংশন বের করে তার ডোমেন বের করি তাহলে আসল ফাংশনের রেঞ্জ বের হয়ে যাবে!!

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$
$$\implies cxy + dy = ax + b$$
$$\implies cxy - ax = b - dy$$
$$\implies x(cy - a) = b - dy$$
$$\implies x = \frac{b - dy}{cy - a}$$

$$f^{-1}(y) = x$$

$$\implies f^{-1}(y) = \frac{b - dy}{cy - a}$$

$$\implies f^{-1}(x) = \frac{b - dx}{cx - a}$$

এবার দেখা যাক কোন মানের জন্য এই ফাংশনটা সঙ্গায়িত নয়।

এই ফাংশনের হর শূণ্য হতে হলে,$\mathrm{cx} - \mathrm{a} = 0 \implies \mathrm{x} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$

এবার বের করে ফেলেছি বিপরীত ফাংশনের ডোমেন একই সাথে আসল ফাংশনের রেঞ্জ তা হলো বাস্তব সংখ্যা থেকে $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$ বাদ গাণিতীক ভাবে $\mathbb{R} - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$

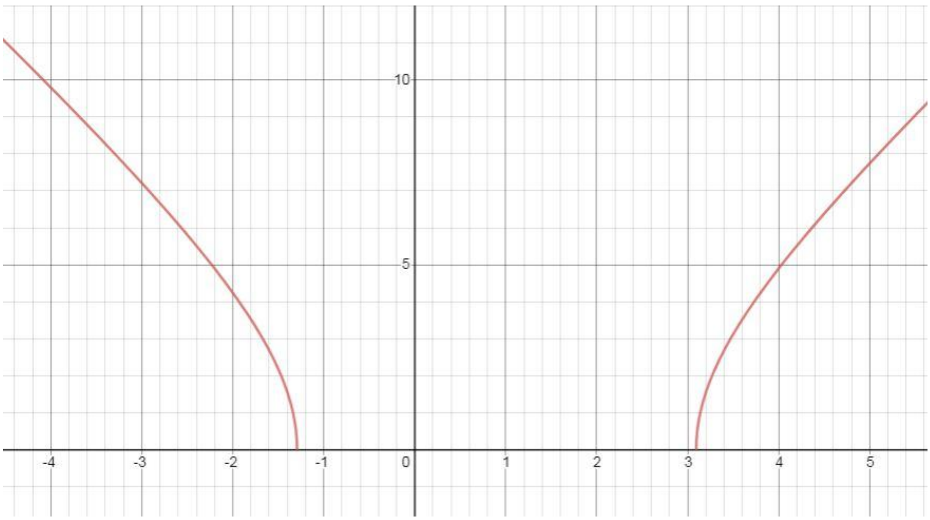
আমাদের ফাংশনটা যেরূপে দেয়া হয়েছিল সেখান থেকেই সহজেই ডোমেন আর রেঞ্জ বলে দেয় সম্ভব কিন্তু।

এরপর থেকে পরীক্ষায় এমন প্রশ্ন দেখলে নিমিষেই উত্তর করে দিবা,

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

আকারের ফাংশনের ডোমেনঃ $\mathbb{R} - (-\frac{d}{c})$
রেঞ্জঃ $\mathbb{R} - \frac{a}{c}$
এবার আসি বর্গমূল ফাংশনে,

$y = \sqrt{f(x)}$ এই ধরনের ফাংশন গুলো যেমন হতে পারে $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
আমরা জানি বর্গমূলের মধ্যে ঋণাত্বক সংখ্যা চলে গেলে তা আর বাস্তব সংখ্যা দিয়ে সঙ্গায়িত করা যায় না হয়ে যায় অবাস্তব। অবাস্তব সংখ্যা নিয়ে দীর্ঘ একটা আলোচনা আছে কিন্তু ফ্রি বইতে দিলাম না,যদি শক্ত মলাটের বই হয় এই নিয়ে বিস্তারিত থাকবে



বর্গমূল ফাংশন গুলোর গ্রাফ এই রকমের আকারের হয় মাঝে বিশাল একটা ফাকা। কোথায় গেল গ্রাফের এই জায়গাটুকু?

যাহোক ফাংশনটি সঙ্গায়িত হবে যদি

$f(x)$ এর মান কোনো ধণাত্বক সংখ্যা হয়। বিভিন্ন রকমের $f(x)$ দিয়ে ডোমেন রেঞ্জ চাইতে পারে।
ডোমেন এর শর্ত হবে,

$f(x) > 0$
এবার সমাধান করে x এর যে মান গুলো শর্ত মানবে তারা হবে ডোমেন

বিচিত্র রকমের $f(x)$ থাকতে পারে যেমনঃ$\mathrm{ax} + \mathrm{b}, \mathrm{ax}^2 + bx + c, \frac{ax+b}{cx+d}$ তোমাদের কে শর্ত বের করতে হবে।

একটা ব্যাপার খেয়াল করো আগের ফাংশন গুলো শুধু মাত্র একটা নির্দিষ্ট মানের জন্য সঙ্গায়িত করা যায় না। তাদের গ্রাফে দেখা যায় ওই মানের খুব কাছে গেলে ফাংশনের স্কেচটা হয় খুব উপরে উঠে গেছে নাহয় খুব নিচে নেমে গেছে,শেষ পর্যন্ত আমরা দেখতে পাই না কিন্তু যতই দূরে যাই স্কেচ কিন্তু দেখা যায়। কিন্তু এবারে দেখো বেশ বড় সড় একটা ফাকা জায়গা এই টুকু জায়গায় গ্রাফ নেই,একদমই নেই। কোথায় গেল? অবাস্তব কোনো জগতে চলে যায় নি তো। একটু ভাবো। আমি এখানে উত্তর দিবো না। উত্তর দিবো যদি পূর্নাঙ্গ বই আসে...

ইনভার্স ফাংশনের একটা গুরুত্বপূর্ন ধর্ম হলো

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})\right) = \mathrm{x}$$

এই ব্যাপারটা আমরা প্রমাণ করে দেখাবো। একটু আগেই একটা ফাংশন আর তার বিপরীত ফাংশন বের করে রেখেছি চলো সেখান থেকেই এই ঘটনা দেখে আসা যাক।

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

এই ফাংশনের বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \frac{b-dx}{cx-a}$

এবার যদি আসল ফাংশনে x এর জায়গায় $f^{-1}(x)$ বসিয়ে দেই তাহলেই পেয়ে যাবো $\mathrm{f}\left(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})\right)$

যেহেতু ফাংশনটা ভগ্নাংশ আকারে আছে তাই লব আর হর আলাদা করে হিসাব করে নিলে একটু সহজ হবে। লিখছি

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{af^{-1}(x)+b}{cf^{-1}(x)+d}$$

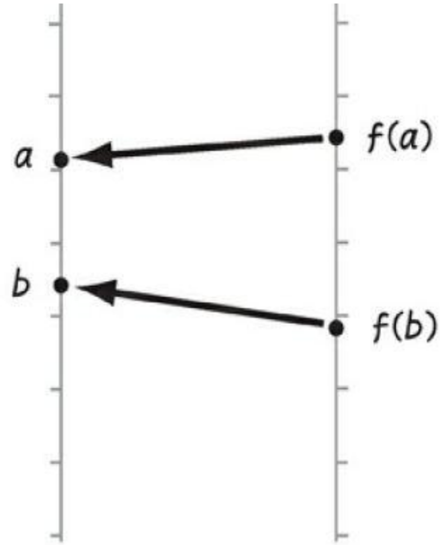
লবের মান $af^{-1}(x) + b = a\left(\frac{b-dx}{cx-a}\right) + b = \frac{ab-adx+b(cx-a)}{cx-a} = \frac{ab-adx+bcx-ab}{cx-a} = \frac{x(bc-ad)}{cx-a}$

হরের মান $cf^{-1}(x) + d = c\left(\frac{b-dx}{cx-a}\right) + d = \frac{bc-cdx+d(cx-a)}{cx-a} = \frac{bc-cdx+cdx-ad}{cx-a} = \frac{bc-ad}{cx-a}$

এবার পাওয়া গেল $f\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{x(bc-ad)}{cx-a} \div \frac{bc-ad}{cx-a} = \frac{x(bc-ad)}{cx-a} \times \frac{cx-a}{bc-ad} = x$

এই কথাটা সব সময় মনে রাখবা

$$\boxed{f\left(f^{-1}(x)\right) = x}$$



ফাংশন আর ইনভার্স ফাংশনের ব্যাপারটা এইরকম। এই নিয়ে কথা থাকছে একটু পরেই...

গাণিতীক ছবি মানেই কি ফাংশনের ছবি?

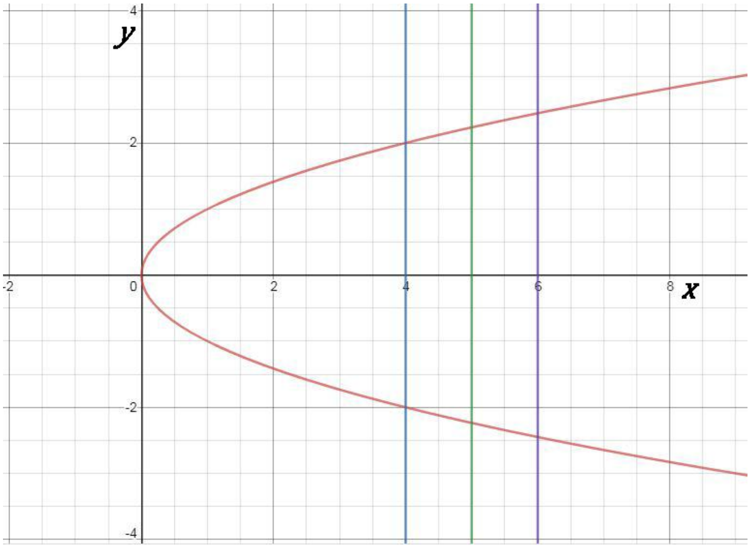
আগের অধ্যায়ে বলেছিলাম প্রতিটা গাণিতীক সম্পর্কই কিন্তু ফাংশন হতে পারবে না ফাংশন হতে হলে বাস্তবতার সাথে মিলতে হয়। কিন্তু একটা জিনিস খেয়াল করো প্রতিটা গাণিতীক সম্পর্ককেই কিন্তু গ্রাফে আকা সম্ভব। তার মানে একটা গ্রাফ দেখলেই সেটা ফাংশনের গ্রাফ এই কথা বলা যাবে না। আগের অধ্যায়ে আলোচনা করে ক্লিয়ার করেছি। যদি কোনো অন্বয়ে x এর একটা মানের জন্য y এর একাধিক মান পাওয়া যায় তাহলে সেই অন্বয়টা ফাংশন হতে পারবে না। একটা অন্বয় আসলে ফাংশন হবে কিনা আমরা এই ব্যাপারটা গ্রাফ দেখলেই বুঝে যাবো।

আমরা জানি x অক্ষে একটা মান বসিয়ে অন্বয় তার যে মান নির্দেশ করে সেটা y অক্ষে নির্দেশিত হয় এভাবেই তৈরী হয় একটা ফাংশনের স্কেচ। তাহলে চিত্রের মতো করে যদি x অক্ষের উপর একটা লম্ব আকি সেই লম্ব স্কেচে y এর মান নির্দেশ করবে। সেক্ষেত্রে যে রেখাটা আকা হবে সেটা গ্রাফকে ছেদ করে যাবে আসলে ওই ছেদ বিন্দুটাই ওই অন্বয় দ্বারা নির্ধারিত y এর মান। যদি ছেদ একটা হয় তাহলে x এর একটা মানের জন্য y এর একটা মানই পাওয়া যায় যদি একের অধিক হয় তার মানে x এর একটা মানের জন্য y এর একের অধিক মান পাওয়া যায় যেটা কোনো ফাংশনের ধর্ম না। তাহলে কোনো অন্বয়ের গ্রাফে যদি x অক্ষের উপর লম্ব (আর y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা একই কথা) একে একের অধিক ছেদ বিন্দু পাওয়া যায় তাহলে অন্বয়টা ফাংশনের মর্যাদা হারাবে।

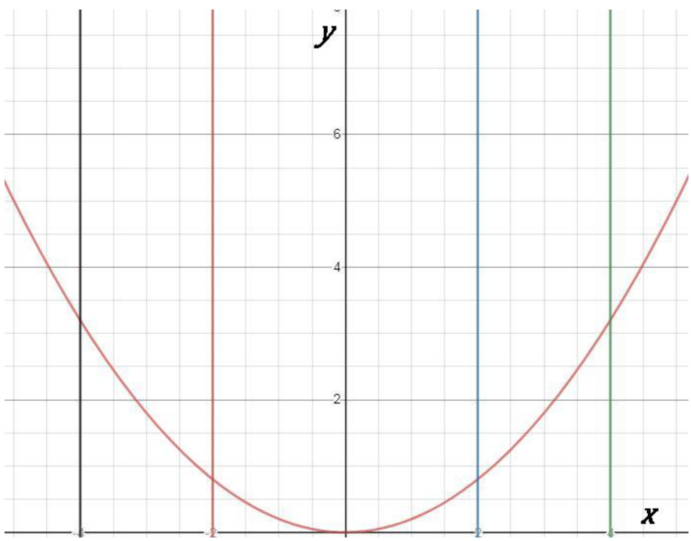
একটা প্রশ্ন থেকেই যায় যদি কিছু গ্রাফের কিছু অংশে y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা একের অধিক বিন্দুতে ছেদ করে আর কিছু অংশে একটা বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে অন্বয়টা ফাংশন হবে কিনা সেই ব্যাপারে কি সিদ্ধান্ত নিবো?

উত্তরটা হলো যে বিন্দুতে বা গ্রাফের যে অংশের জন্য একটা ছেদ পাওয়া যাবে সেই অংশটা ফাংশন আর যে অংশ গুলোতে একের অধিক ছেদ পাওয়া যায় সেই অংশটা ফাংশন নয়।

বিভিন্ন রকমের আকৃতির গ্রাফ কখন ফাংশন হয় কখন হয় না সেই কথা গুলো বলতে গেলে আরো অনেক আলোচনা করতে হবে যা এখন সম্ভব না। আপাতত ওইযে y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা আকার বুদ্ধিটা দিলাম ওটাই মনে রাখো তাহলেই যেকোনো গ্রাফ আসলে ফাংশনই নির্দেশ করে কিনা তা অনায়শে বোঝা সম্ভব।



ছবিতে যে গ্রাফটা দেখানো হয়েছে তাতে y অক্ষের সমান্তরালে লম্ব আকা হলে তা দুইটি বিন্দুতে ছেদ করছে কাজেই এই অন্বয়টি ফাংন হতে পারে না এমন যদি অন্য কোনো গ্রাফে দেখো তাহলে কোনো মতেই সেই অন্বয়টি ফাংশন হবে না। তবে হ্যা গ্রাফের কোনো বিশেষ অংশ জুড়ে যদি y অক্ষের সমান্তরালে আকা সরলরেখা গ্রাফটিকে শুধুমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে ঐটুকু ব্যবধির জন্য অন্বয়টি ফাংশন। এই নিয়ে আছে শত কথা সেগুলো পরে প্রিন্টেড বই আসলে বলবো।

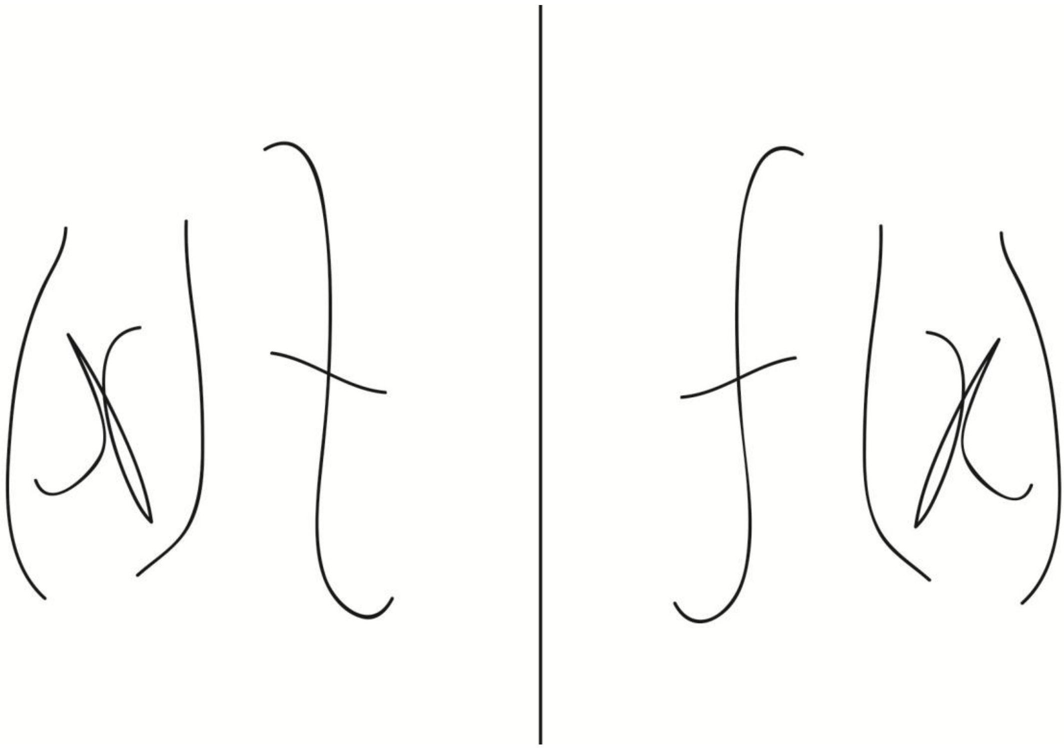


এক্ষেত্রে যে গ্রাফটি পাওয়া গেছে তাতে দেখো y অক্ষের সমান্তরালে রেখা আকার ফলে মাত্র একটা বিন্দুতেই ছেদ করেছে কাজেই এই গ্রাফটি যে অন্বয়ের সেটি একটি ফাংশন।

ফাংশনের প্রতিবিম্ব(Image of Function)

এর আগে ইনভার্স ফাংশন বা বিপরীত ফাংশন নিয়ে আলোচনা করেছিলাম। সে এক আজব জিনিস,দর্পণের উপর ফাংশনের প্রতিবিম্ব। আয়নায় নিজের চেহারা দেখেছো তো?

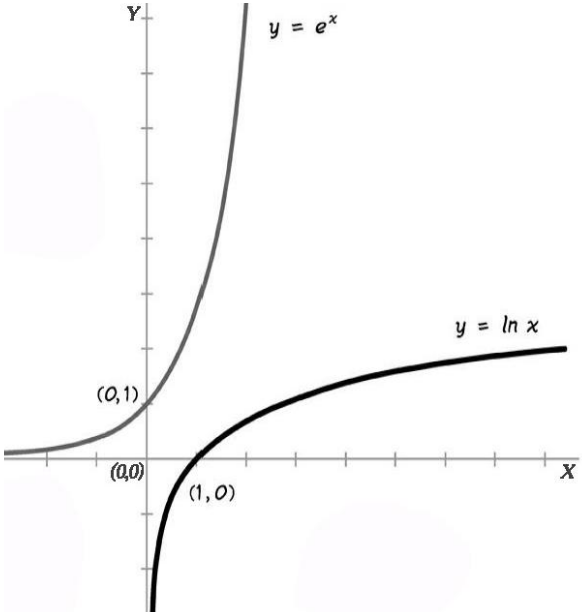
একইভাবে আয়নায় ফাংশন নিজের চেহারা দেখতে পারে। ব্যাপারটা ঠিক নিচের ছবির মতো হবে



আয়নায় ফাংশন নিজেকে দেখলে যেমন হতো

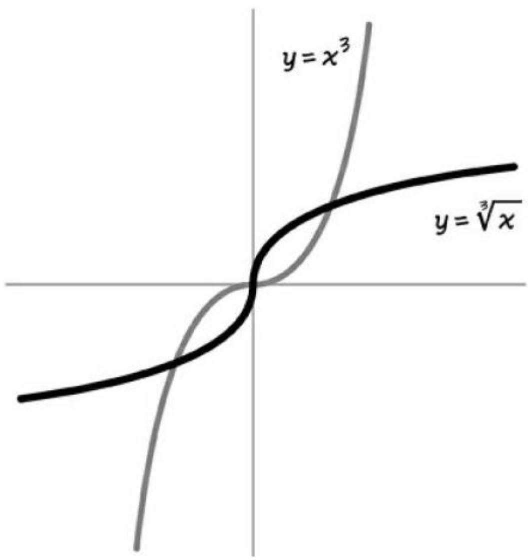
গ্রাফে ফাংশন আর ইনভার্স ফাংশনের গ্রাফ এই আচরণ টাই দেখাই একদম আয়নায় নিজের চেহারা দেখার মতো ব্যাপার ঘটে। চলো একটা ফাংশন আর ইনভার্স ফাংশনের গ্রাফ আকলে কেমন দেখায় একটু দেখে আসি।

$y = e^x$ একটা ফাংশন হলে তার ইনভার্স ফাংশন হলো $y = lnx$



ছবিতে $y = e^x$ আর $y = lnx$ ফাংশনের গ্রাফ আকা হয়েছে এর ফলে কি ঘটছে দেখতে পাচ্ছো। কোনো মিল পাচ্ছো?কেউ কেউ হয়তো পাচ্ছো।

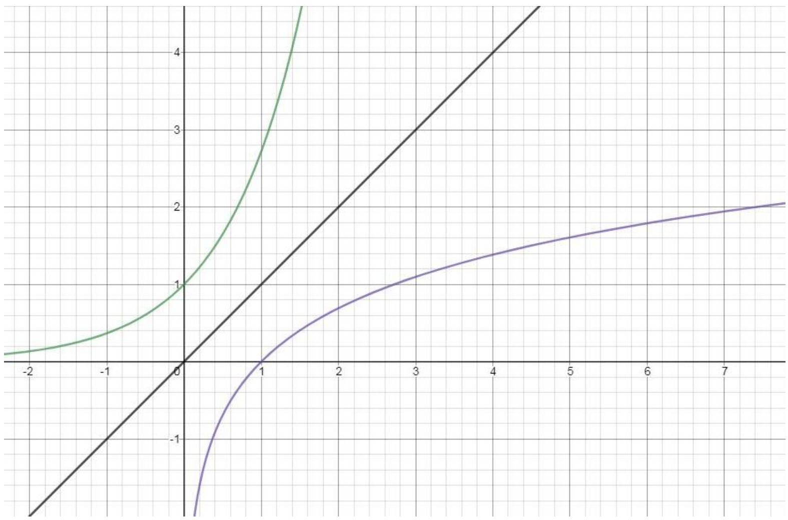
একটা ব্যাপার খেয়াল করো গ্রাফ দুইটার আকৃতি একই রকম শুধু অবস্থান আলাদা,আবার ফাংশনের যে স্কেচ পাওয়া গেছে সেই স্কেচের প্রতিটা বিন্দু একে অপরের সাপেক্ষে প্রতিসম। এই একই ব্যাপার আরো ফাংশনের গ্রাফে লক্ষ্য করা যায়



এইযে দুইটা গ্রাফের স্কেচের উপরে সকল বিন্দু প্রতিসম কেন এমন হচ্ছে? কেই বা দর্পণের মতো ভূমিকা রেখে প্রতিসম বিন্দু অর্থাৎ, যত্ন করে প্রতিটা বিন্দুর প্রতিবিম্ব তৈরী করছে ধরতে পারছো।

আমাদের এই দর্পণ হলো $y = x$!!

একটা ফাংশনের স্কেচের প্রতিবিম্ব তৈরী করতে যে দর্পণ কাজ করে সেই দর্পণ হলো $y = x$। ছবিতে $y = x$ দর্পণের সাপেক্ষে ফাংশন আর ইনভার্স ফাংশনের প্রতিবিম্ব তৈরী হওয়ার ঘটনা দেখানো হলো।

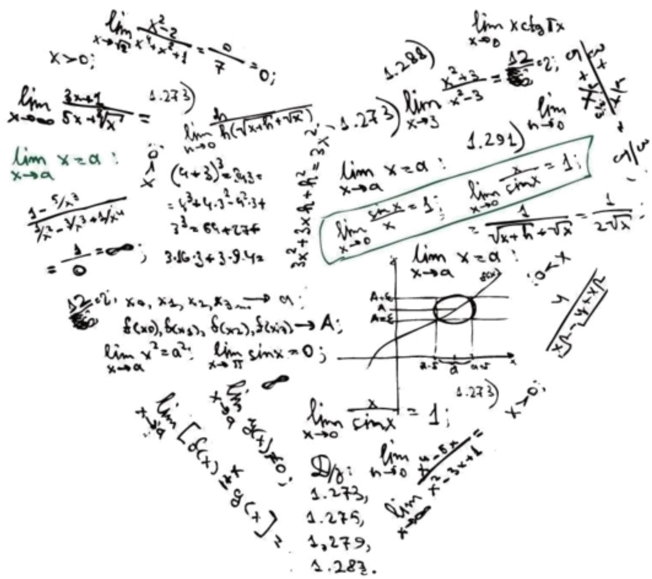


কেন $y = x$?

$y = x$ তো একটা সরল রেখা যার অর্থ দাঁড়ায় প্রতিবিম্ব তৈরীতে একটা সমতল দর্পণ ব্যবহার করা হয়েছে। একটা বিষয় খেয়াল করো যে প্রতিবিম্ব গঠিত হয়েছে তার মধ্যে কিন্তু সমতল দর্পন দ্বারা গঠিত প্রতিবিম্বের সব ধর্মই রয়েছে।

আচ্ছা এমন কিছু করা যায় না যেখানে আমরা অন্য কোনো দর্পণের সাপেক্ষে একটা ফাংশনের বিপরীত ফাংশনের ছবি আকতে পারবো? যেকোনো আকারের দর্পণ যেমন $y = x^2$ কে ব্যবহার করতে পারি অথবা অন্য কোনো জটিল ট্যারা-বাকা ফাংশন। তাহলে কেমন হয় বিষয়টা?কিভাবে সম্ভব? ভাবো আমি এই বইতে আর দিবো না পূর্নাঙ্গ বই আসলে ক্লিয়ার করবো।

সীমা(Limit)



তোমরা তো জানো সব কিছুর একটা সীমা আছে। সীমার বাইরে কোনো কিছুই যেতে পারে না এমনকি একটা ফাংশন ও না। ধরো একটা অসীম গভীর কূপ। সেখান থেকে আমরা বালতির সাথে দড়ি বেধে পানি উঠাবো,সর্বোচ্চ কতোটুকু গভীরের পানি উঠাতে পারবো জানো?

দড়ির দৈর্ঘ্য যতটুকু ঠিক ততটা তার বেশি একটুও না কিন্তু। যদি অবশ্য অসীম দৈর্ঘ্যের দড়ি দেয়া হয় তাহলে অবশ্য একদম নিচের পানি তোলা সম্ভব। তবে লাভ নেই এতো বড় দড়ি পৃথিবীতে কেন মহাবিশ্বে নেই। এমন গর্তই বা কোথায় আছে? ভাবো একটু। অসীম নিয়ে কিছুক্ষণ চিন্তা করলেই তোমার মাথা খারাপ হয়ে যাবে।

ওইযে আমাদের ফাংশন সে কিন্তু একটা যন্ত্রের মতো কিছু ইনপুট দিলে আউটপুট দিতে পারে চমৎকার ভাবে একটুও ভূল করে না। কিন্তু জানো তো সব যন্ত্রের একটা নির্দিষ্ট ক্ষমতা আছে,একটা সীমা আছে এর বাইরে যন্ত্র কাজ করা বন্ধ করে দেয়,ক্ষমতা দেখাতে পারে না।

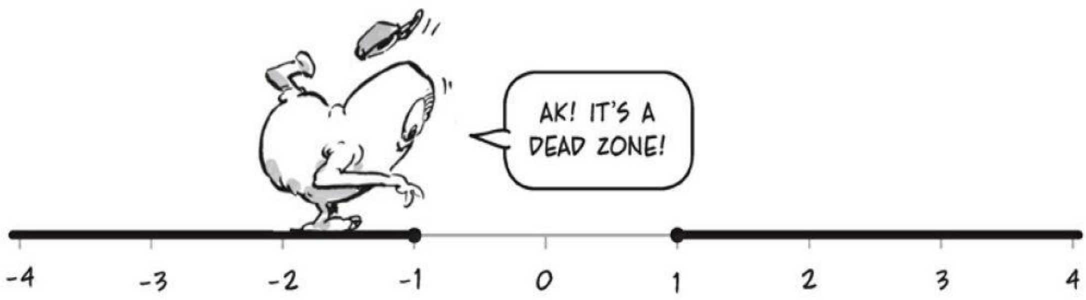
কোনো কোনো যন্ত্র একদম কাজ বন্ধ করে দেয় না প্রতিকূল অবস্থায় ক্রমশ কাজের গতি কমিয়ে দেয়,অবস্থা যতই প্রতিকূল হতে থাকে ততই কম কাজ করতে পারে। শেষে একটা জায়গায় সে কাজ করা প্রায় ছেড়েই দেয়,মানে মেশিন জিনিস তো কথা বলতে পারে না কিন্তু আভাস দিতে থাকে আমার সীমা এতোটুকুই,আমি সর্বোচ্চ এই জায়গা পর্যন্ত পৌছাতে পারবো। বুদ্ধিমানদের এই জিনিসটা বুঝতে হয় কোথায় একটা মেশিনের কাজের সীমা।আমাদের ও ক্যালকুলাস পারতে হলে বুঝতে হবে ফাংশন নামক মেশিনের সীমা কোথায়?কেমন পরিবেশে সে কেমন কাজ করে?কি বোঝাতে চায়?

একটু পড়াশুনার ভাষায় বলতে গেলে একটা ফাংশন ক্রমাগত নির্দিষ্ট মানের কাছাকাছি চলক গ্রহন করতে থাকলে যদি এমন হয় যে সে সর্বদা একটা নির্দিষ্ট মানের দিকেই যাচ্ছে তাহলে বুঝতে হয় ।চলকের একদম পারফেক্ট ঐ মানটার জন্য ফাংশনের মানের সীমা প্রাপ্ত মানটা।

ধরো একটা ফাংশনঃ

f(x)= $\frac{x^2-9}{x-3}$

মানে এই ফাংশনে x= 3 বসালে সমস্যা আছে। সহ্য করতে পারে না সে ছিড়ে যায়।



সহ্যশক্তি এক্সট্রিম লেভেলে পৌছে যায়।

এইযে বিশেষ ধরনের ফাংশন এগুলো ছিড়ে যায় বা বিচ্ছিন্ন হয়ে যায় এদের বলাহয় বিচ্ছিন্ন (x এর কোনো একটা সীমায় বিচ্ছিন্ন)।তবে কিছু ফাংশন আছে x এর মান যাই বসাও না কেন সব সহ্য করতে পারে। এইধরনের ফাংশনকে বলা হয় নিরবিচ্ছিন্ন ফাংশন। একটু পরেই একটা জিনিস লক্ষ্য করে দেখবে একটা ফাংশন বিচ্ছিন্ন হয়ে যাওয়ার কারন হলো তার হরের ওজন(মান) চলক যখন হর হিসেবে থাকে কেবল তখনই বিশেষ চলকের বিশেষ সীমার জন্য ফাংশন বিচ্ছিন্ন হয়ে পরে,কাজেই হরে যদি চলকই না থাকে তাহলে সেই ফাংশন কখনোই বিচ্ছিন্ন হবে না। এই তথ্যটা মনে রাখতে পারো অনেক সময় পরীক্ষায় এমন প্রশ্ন দেখতে পারো যখন কিছু ফাংশন দেখিয়ে বলা হয় কোন ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন বা বিচ্ছিন্ন,আশা করি এমন প্রশ্নে উত্তর দেয়া সহজ হবে।

কিন্তু 3 এর খুব কাছাকাছি এসে সে কি বলছিল সেটা কি দেখতে পাচ্ছো।

3 এর খুব কাছাকাছি মানে কি জানো?

নিচের টেবিলটা দেখোঃ

মান	**3 থেকে দূরত্ব**	**মান**	**3 থেকে দূরত্ব**
2.9	0.1	3.1	0.1
2.99	0.01	3.01	0.01
2.999	0.001	3.001	0.001
2.9999	0.0001	3.0001	0.0001
2.99999	0.00001	3.00001	0.000001

X	f(x)	X	f(x)
2.9	5.9	3.1	6.1
2.99	5.99	3.01	6.01
2.999	5.999	3.001	6.001
2.9999	5.9999	3.0001	6.0001
2.99999	5.99999	3.00001	6.00001

উপরের টেবিল দুইটাতে দেখা যাচ্ছে x এর মান ক্রমাগত 3 এর কাছাকাছি আসলেই f(x) ক্রমাগত 6 এর কাছাকাছি যায়।

এই জায়গা গুলোতে কিন্তু ফাংশন একই কথা বলছে সেটা হলোঃ তার মান ক্রমাগত 6 এ যেতে চায়। কিন্তু ঠিক ৩ বিন্দুতে পৌঁছে প্রায় কাছাকাছি বিন্দু গুলোর টান সহ্য করতে না পেরে সে ছিড়েই গেল আর কথা বলতে পারলো না। তোমরা কি বুঝেছো আসলে সে কি বলছিল,যদি x= একদম পারফেক্ট 3 হয় তাহলে সে বলছিল সে হবে 6

এই জিনিসটা গণিতে বলা হয় লিমিট। আগেও বলেছি এই লিমিটের কথা। উপরের

f(x)= $\frac{x^2-9}{x-3}$

এই ফাংশনটাতে x এর মান ৩ হতে চাইলে ছিড়ে যাওয়ার আগে ফাংশনের কথা মতো সে হতে চায় 6 তাই তো।

হতে চায় এর ইংরেজি Tends to . অংক করার সময় এতো লিখা তো যাবে না তাই বলা হয় limit x tends to 3 (এক্স এর সীমা হতে চায় 3)

এই পুরো জিনিসটা গাণিতীক ভাবে লিখা হয়,

f(x)= $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

যদি এই রকম একটা ফাংশন দিত, f(x)= $\frac{x+2}{x+4}$ গ্রাফ একে দেখো এই ফাংশন x=3 বিন্দুতে ছিড়ে না (যদিও অন্য বিন্দুতে ছিড়বে)। এবার যদি বলা হয় x=3 হলে এই ফাংশনের আউটপুট কত? বেশ সহজেই বের করা যাবে। এবার এতো খাটার দরকার নেই শুধু মান বসিয়ে দিলেই হলো,

$$f(3) = \frac{3+2}{3+4} = \frac{5}{7}$$

আগের বার limint x tends to লেখার দরকার হয়েছিল কিন্তু এবার নেই। কেননা আগের ফাংশনটাতে x কোনোভাবেই 2 হতে পারে নি কিন্তু হওয়ার প্রবল চেষ্টা করেছিল মাত্র কিন্তু এবারেরটায় যা খুশি তাই হতে পারবে।

তাই সরাসরি লিমিট না লিখে f(3)

এতক্ষণের বক বক শুনে কি বুঝেছো লিমিট কি জিনিস? যদি বুঝো কাহিনী আরো বাকি আছে।

f(x)= $\frac{x^2-9}{x-3}$

এই ফাংশনটার ক্ষেত্রে দেখেছো কি 3 এর খুব কাছাকাছি আসতে পারলেই ভ্যালু আসে 6 এর কাছাকাছি সে যেভাবেই 3 এর কাছে আসো না কেন।

কিন্তু কিছু কিছু ফাংশন আছে তারা কিন্তু এতো ভালো না লিমিটের কাছাকাছি একদিক থেকে আসলে যে উত্তর পাওয়া যায় অন্যদিক মানে বিপরীত দিক থেকে আসলে তার বিপরীত উত্তর।

যেমন ধরো, g(x)=$\frac{1}{x}$

এই ফাংশনের স্কেচে দেখো x=0 তে এই ফাংশনটা বিচ্ছিন্ন হয়ে যায় বা ছিড়ে যায়। এখন দেখা যাক,x এর মানকে 0 এর খুব কাছাকাছি নিয়ে যেতে থাকলে কি ঘটে এবারেও ডান বাম দুদিক থেকেই 0 এর কাছাকাছি আসবো। ডান ও বাম দুদিক থেকেই ১ এর কাছাকাছি আসা বলতে কি বোঝানো হয়েছে আশা করি চিত্রঃ২ গ্রাফটা দেখলেই বুঝবে। (চিত্রঃ১ এর টেবিল ১.৩)

X	**g(x)=** $\frac{1}{x}$	**X**	**g(x)=** $\frac{1}{x}$
0.1	10	-0.1	-10
0.01	100	-0.01	-100
0.001	1000	-0.001	-1000
0.0001	10000	-0.0001	-10000
0.00001	100000	-0.00001	-100000

দেখলে এবার কি ঘটলো এবার কি বলা যাবে x শূন্যের খুব কাছাকাছি গেলে g(x) এর কোনো নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে। সে তো পাওয়া যাচ্ছেই না। বড় জোড় বলতে পারি x ক্রমাগত 0 এর কাছাকাছি আসলে g(x) এর মান ক্রমাগত বড় হতে থাকে। একদম শূন্য হয়ে গেলে g(x) এর যত বড় মান পাবো তার কোনো সীমা নাই মানে অসীম। কিন্তু ভালো করে দেখো সেটা বলার ও কি উপায় আছে?

নাহ নেই কারন ঋণাত্নক বা বাম দিক থেকে ক্রমাগত 0 এর কাছাকাছি এলে g(x) ক্রমাগত বড় একটা ঋণাত্নক সংখ্যা হতে থাকে এক সময় হয়তো হবে ঋণাত্নক অসীম। ঋণাত্নক অসীম মানে হলো যত টাকা ধার নিলে জীবনেও শোধ করা সম্ভব হবে না সেইটা।

তাহলে কি বলবো,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ??$$

ঋণাত্নক অসীম না ধণাত্নক অসীম কারো কাছে উত্তর আছে কি? যদি বিতর্ক লাগিয়ে দেয়া হয় দুই দলই সমান যুক্তি দেয় তাই এ নিয়ে আর মাথা ঘামানো হয় নি। বলে দেয়া হয়েছে উত্তর জানা নেই। গণিত এই প্রশ্নের উত্তর দিতে পারে নি। এটা অসঙ্গায়িত। এতোক্ষণে কি বুঝেছো অসঙ্গায়িত আর অসীম এক জিনিস না।

যে প্রশ্ন গুলোর উত্তর গণিত জানে না(What math doesn't know)

এবার দেখাবো আরো এক মজার জিনিস

$$\frac{0}{0}$$

ছোট বেলার নিয়মে এই ভাগটা মেলানোর চেষ্টা করা যাকঃ

আমরা কিন্তু জানি,

$0 \times x = 0$[x যা ইচ্ছা তাই হতে পারে,সোজা কথা ০ দিয়ে কোনো কিছুকে গুন করলে পাওয়া যায় ০]

এবার ভাগ করো,

$0 \times 1 = 0 \Longrightarrow \frac{0}{0} = 1$

$0 \times 2 = 0 \Longrightarrow \frac{0}{0} = 2$

$0 \times 3 = 0 \Longrightarrow \frac{0}{0} = 3$

$$0 \times 4 = 0 \Longrightarrow \frac{0}{0} = 4$$

$$0 \times \pi = 0 \Longrightarrow \frac{0}{0} = \pi$$

$$0 \times (-2) = 0 \Longrightarrow \frac{0}{0} = -2$$

$$0 \times (-e) = 0 \Longrightarrow \frac{0}{0} = -e$$

উপরের অংক গুলোতে কি কোনো ভূল আছে। নেই তো ভালো করে পড়া শুনা করে দেখো নেই। তাহলে আসল উত্তরটা কত?

এটাও গণিতের জানা নেই।

এই রকম আরো কিছু জিনিস আছে যেগুলো গণিত জানে না।

অনির্ণেয় আকার গুলো একটু ফিল করা যাকঃ

এর আগে তো দেখালাম কোনো ফাংশনের হরে শূন্য থাকলে প্রচুর ঝামেলা। অর্থাত,নিচে শূন্য থাকলেই সমস্যা আছে উপরে যাই থাকুক না কেন নিচে শূন্য থাকা যাবে না।

x/0 এর গল্পঃ

যদি এই x=0 হয় তাহলে কি ঘটবে(0/0)? শূন্যে শূন্যে কাটা তাই তো? কিন্তু না এখানে বাধে যুদ্ধ।

নিচের শূন্যঃ উপরে যেই থাকুক আমি তাকে অসীমে পাঠাই অথবা একদম ঋণাত্বক সংখ্যার প্রান্তে পাঠাই। (এখানেই কোনো নির্দিষ্ট উত্তর নেই)

উপরের শূন্যঃ ভাগফল যাই হোক,আমিও সেই জিনিস আমার কাছে যেই আসুক আমি তাকে ০ বানাই।

গণিতবিদঃসরি,আমরা কিছুই বলতে পারলাম না।

এবার অসীম নিয়ে কিছু কথা,

অসীম আর অসীম এই দুইটার মধ্যে কোনো গাণিতীক কাজই সম্ভব না। অসীম থেকে কিছু কমালেও তার কোনো পরিবর্তন নেই বাড়ালেও তার কোনো পরিবর্তন নেই।

মানে,$\infty \mp x = \infty$ তাই হওয়ার কথা না। কিন্তু না যদি এটাই ধরে নেয়া হয় তাহলে অনেক বড় বড় ঝামেলা বেধে যাবে। এগুলোর দায় গণিতবদরা নিতে রাজি নন।

তাই এই কাজ গুলো কখনোই করা যাবে না,

$$(\infty \times \infty) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (\infty - \infty) = \text{গণিত জানে না}$$

কখনোই এই কয়টা জিনিস ব্যবহার করে কিছু প্রমাণ করার চেষ্টা করবা না। যেমনঃ1+2+3+4+…=-1/12, 1=4,1=2 এই প্রমাণ গুলোতে কখনো অসীম থেকে অসীম যোগ করা হয় কখনো বিয়োগ বা উলটা পালটা টাইপের নিয়ম অনুসরন করা হয় যা গণিত জানেই না।

মাথার উপরে শূন্যঃ

মাথার উপরে শূন্য এর মানে জানো,

সূচকের এই সূত্র তো জানো, $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ a=b বসিয়ে দিলে দাঁড়ায়, , $\frac{x^a}{x^a} = x^0$

এবার যদি x=∞ বসাও তাহলে আসে $\frac{\infty}{\infty} =$ গণিত জানে না

একটা জিনিস খেয়াল করে দেখো,অর্নির্নেয় আকার আসছে কখন,যখন এমন ঘটছে যে যাদের মধ্যে গাণিতীক কাজ হচ্ছে তাদের একজন বলছে এক রকম কথা অন্য একজন বলছে আরেক রকমের কথা তখনই গণিত বলে দেয় এর উত্তর অজানা।

১ এর মাথায় অসীম ভারঃ

$$1^{\infty}$$

তোমরা তো জানোই 1এর উপরে যাই দিবা পাওয়া যাবে 1। কিন্তু ঝামেলা এই ব্যাটা অসীমের বেলায়

ধরো,

$$x = 1^{\infty} \Longrightarrow 1.1.1.1\ldots \Longrightarrow x = 1.x$$

এখান থেকে x এর কোনো মানই বের করা সম্ভব??

এতোক্ষণ যে কয়টা জিনিস নিয়ে আলোচনা করেছি সেগুলোর মান গণিত জানে না। যেকোনো উত্তর হতে পারে কিন্তু আসলে কতো হবে তা সঠিক ভাবে বলা যাবে না। তো যে কয়টা আকারের বীজগাণিতীক রাশি থাকলে তার মান গণিত জানে না সেই রকম ৭ টা আকার আছে

$\mathbf{\frac{0}{0}}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\mathbf{0^0}$	$\mathbf{1}^{\infty}$	$\infty - \infty$	$\infty^{\mathbf{0}}$	$\mathbf{0}.\infty$

আমাদের টেক্সট বই গুলোতে এই আকার গুলোতে বিভিন্ন লিমিট দিয়ে অংক করতে বলা হয়।

একটু আগে বলেছি এই আকার গুলোর উত্তর অনির্নেয় মানে আসলে মান কোনটা গণিত জানে না। মান যা ইচ্ছা তাই হতে পারে,কিভাবে এই আকার গুলোর মান যা ইচ্ছা তাই হতে পারে আগে প্রমাণ দেখিয়েছি।

এবার দেখাবো অনির্নেয় আকার গুলো কিভাবে আসে

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

এই ফাংশনটাতে যদি x=3 বসিয়ে দাও তাহলে অনির্নেয় আকার $\frac{0}{0}$ চলে আসবে। কিন্তু ডেসমোসে যাও এই ফাংশনের গ্রাফ আকো,সেই গ্রাফে x=3 বিন্দুটার খুব কাছে যাও দেখবে গ্রাফটা কিছু বলতে চাইছে। গ্রাফের রেখা ক্রমাগত একটা নির্দিষ্ট মানের কাছে পৌছাতে চাইছে। আমরা দেখে বুঝতে পারি এই ফাংশনটার শেষ সীমা কোথায় হবে।

কে বলেছে গণিত জানে না গণিত সব জানে(Math can answer Everything)

অনির্নেয় আকার মানেই যে তার সীমাস্থ মান বলা অসম্ভব এমন ভাবার কোনো কারন নেই সকল অনির্নেয় আকারের সীমাস্থ মান বের করা সম্ভব তার জন্য আমাদের শুধু কিছু কৌশল প্রয়োগ করতে হয়।

এখানে কিছু অনির্নেয় আকার এবং তাদের সীমাস্থ মান বের করার কৌশল দেখাবো

সাধারণ এবং মাথামোটা টাইপের একটা কৌশল হলো যে ফাংশন দেয়া আছে তার গ্রাফ একে ফেলা তারপর যে লিমিটে মান জানতে চাওয়া হচ্ছে,গ্রাফে সেই লিমিটের দিকে তাকানো এইভাবে একটা নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে। যদিও এই কৌশল প্রয়োগ করা ঝামেলা আছে তাও কিন্তু কার্যকর !

খাতা কলমে লিমিটের মান বের করার জন্য বিশেষ আকারের ফাংশনের চেহারা দেখিয়ে কিছু কৌশল শেখানো যাকঃ

মৌলিক কৌশলঃ১- ফাংশন যদি ভগ্নাংশ হয় তাহলে অনির্নেয় আকার তৈরী হওয়ার কারন হলো হরের মান শূণ্য হওয়া যেমনঃ$\frac{x^2-9}{x-3}$ এই ধরনের ফাংশনের ক্ষেত্রে। এমন হলে সব সময় চেষ্টা করতে হবে গাণিতীক উপায়ে হরে এমন কিছু নিয়ে আসা যাতে লিমিট মান বসিয়ে দিয়ে সঙ্গায়িত করা যায়।

মৌলিক কৌশলঃ২-ফাংশনকে অসীম ধারায় বিস্তৃত করার চেষ্টা করা। অসীম ধারায় বিস্তার করার উদ্দেশ্য থাকে ভগ্নাংশ আকারের ফাংশনকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার মাধ্যমে হরে থাকা যে উপাদানের কারনে অসঙ্গায়িত রূপ আছে সেটা বাতিল করা। এখানে অসীম ধারা বলতে $\mathrm{e}^{\mathrm{x}}, a^x, \ln(1+x)$ এই ধরনের ফাংশন গুলোকে ধারায় বিস্তার করার কথা বলা হয়েছে।

একটা উদাহরণ দিয়ে বোঝানো যাকঃ

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ এই ফাংশনে সরাসরি x=0 বসিয়ে দিলে অনির্নেয় আকার $\frac{0}{0}$ চলে আসবে। আমরা ইতিপূর্বে e^x কে অসীম ধারায় বিস্তার করতে শিখেছি। এখানে সেই কাজটা করছি।

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\frac{x^1}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots = 1$$

দেখলে কিভাবে অনির্নেয় আকার থেকে নির্নেয় আকার আনা যায়।

মৌলিক কৌশলঃ৩-প্রয়োজনীয় বৈধ গানিতীক উপায় অবলম্বন করে প্রদত্ত লিমিটকে চেনা কোনো ফাংশনের রূপে পাওয়া। উদাহরণ দিয়ে ক্লিয়ার করছি।

আমরা অনেক অনেক আগে এই বইতেই শিখেছি $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ এবং $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = e^x$ যদি এই আকারের ফাংশন দেয়া হয় তাহলে লিমিটটাকে চিনে নিয়ে ওই ফাংশন রূপে ফেরত দিতে হবে।

যেমনঃ

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^x$ এখানে $x = \infty$ বসিয়ে দিলে অনির্নেয় আকার 1^∞ চলে আসবে। আমরা কিছু বৈধ গানিতীক উপায়ে ফাংশনটাকে গুছিয়ে লিখতে পারি,

$$\lim_{ax\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax\times\frac{1}{a}} = e^{\frac{1}{a}}$$

এখানে একটা জিনিস অপরিচিত হতে পারে তাহলো লিমিটের সাথে a গুন করা। এই কাজটা কিন্তু বৈধ কেননা $x \longrightarrow \infty$ মানে x একটা বিশাল বড় সংখ্যা একে যদি আবার কোনো একটা ধ্রুবক দ্বারা গুন করা হয় তাহলেও বিশাল বড় একটা সংখ্যাই পাওয়া যাবে যাকে আমরা অসীম বলি কাজেই $x \longrightarrow \infty$ হলে $ax \longrightarrow \infty$ এতে কোনো সমস্যা নেই।

আরো একটা বিষয় খেয়াল করো এখানে আমাদের যে ফাংশন দেয়া হয়েছে আমরা কিন্তু এক বিন্দুও পরিবর্তন করি নি। শুধু a দিয়ে গুন করেছি আবার ভাগ করেছি এর ফলে মান অপরিবর্তিতই থেকে গেল আবার উপরি পাওয়া হিসেবে একটা বিশেষ আকারের ফাংশন পেলাম যাকে আমরা চেনা একটা রূপে লিখতে পারি।

এই রকমের আরো কিছু ফাংশন আছে যেগুলোর লিমিট মান বের করতে ফাংশন গুলোকে অসীম ধারায় বিস্তৃত করতে হয়,যেমন $\lim_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}}{x}, \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{ax}$ এগুলো সমাধান করার জন্য যেসব অসীম ধারা সেখানো দরকার সেগুলো শিখিয়েছি। যদিও এখনো বেশ কিছু অংকে ধাক্কা খেতে পারো। তবে বেশি বেশি চর্চা করতে হবে।

After all, Practice makes a man perfect

এবারে লিমিটের মৌলিক আকার এবং তাদের মান কিভাবে বের করতে হয় তা দেখাবো যেগুলো সমস্যা সমাধান এবং বিশেষ রূপ চিনতে কাজে লাগবে।

আকার-১

$$\lim_{x\to -a}\frac{(x+a)(x+b)}{x+a}$$

এই আকারে বা এর সমতূল্য কোনো আকারে থাকলে হরে সঙ্গায়িত মান নিয়ে আসতে হবে তারপর লিমিট মান বসাতে হবে।

যেমনঃ

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}x^2-2x+4=12$$

আকার-২

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

এখানে $x\longrightarrow a$ হলে a এর সাথে একটা ক্ষুদ্র সংখ্যা $h\longrightarrow 0$ যোগ করে দিতেই পারি তাহলে কিন্তু কোনো বড় অপরাধ হবে না কারন h এর মান তো প্রায় 0

তাহলে দাড়াচ্ছে, $\lim_{h\to 0}a+h=x$

প্রদত্ত ফাংশনে এই কৌশলটা প্রয়োগ করছি তাহলে পাবো,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{(a+h)-a}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^n+na^{n-1}h+na^{n-2}h^2+\cdots+h^n-a^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{na^{n-1}h+na^{n-2}h^2+\cdots+h^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(na^{n-1}+na^{n-2}h^1+\cdots+h^{n-1})}{h}$$

$$=na^{n-1}$$

এবার থেকে এই আকারের ফাংশন সামনে আসলে সরাসরি এই সূত্র প্রয়োগ করবে। যেমনঃ

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^5-3^5}{x-3}=5.3^{5-1}=5.3^4$$

এই আকারের ফাংশন আরো কিছুটা জটিল আকারে দেয়া থাকতে পারে,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{7}{2}}-a^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\frac{7}{2}}-a^{\frac{7}{2}}}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{x-a}}$$

$$=\frac{\frac{7}{2}a^{\frac{7}{2}-1}}{\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1}}$$

$$=\frac{7}{2}\times 2\times a^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}=7a^3$$

এই টাইপের একটা অংক করে দেয়ার উদ্দেশ্য হচ্ছে বাকি গুলো তোমরা নিজেরাই পারবে। আশাকরি আমি সফল!!

আকারঃ৩-

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+d}{ex^n+fx^{n-1}+gx^{n-2}+\cdots+h}$$

এই আকারের কোনো ফাংশন থাকলে লব ও হর থেকে x এর সর্বোচ্চ ঘাত দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করে দিতে হয় ফলে ফাংশনটাকে এই রূপে পাওয়া যায়,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+d}{ex^n+fx^{n-1}+gx^{n-2}+\cdots+h}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n(a+bx^{-1}+cx^{-2}+\cdots+dx^{-n})}{x^n(e+fx^{-1}+gx^{-2}+\cdots+hx^{-n})}$$

এখানে x সংখ্যা রেখার ধণাত্বক দিকে বিশাল বড় একটা সংখ্যা কাজেই x এর সব ঋণাত্বক ঘাতকে শূণ্য বলা যাবে।

কাজেই লিখতে পারি, $\frac{1}{\mathrm{x}}=0,\frac{1}{x^2}=0\ldots\frac{1}{x^n}=0$

এবার ফাংশনে লিমিট মান বসিয়ে দিয়ে পাই,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(a+bx^{-1}+cx^{-2}+\cdots+dx^{-n})}{(e+fx^{-1}+gx^{-2}+\cdots+hx^{-n})}$$

$$=\frac{a+0+0+\cdots}{e+0+0+\cdots}=\frac{a}{e}$$

যেমনঃ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(6+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

লিমিট অসীমে থাকলে ফাংশনের মান হবে সর্বোচ্চ ঘাতের সহগদ্বয়ের অনুপাত। ক্লিয়ার?

এবার থেকে পরীক্ষায় এমন বহুনির্বাচনী প্রশ্ন থাকলে সোজাসুজি উত্তর করতে পারবা।

আকার-৪

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{\frac{x}{b}}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = e^x$ হয় এটা তো জানো একই ভাবে $\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}x} = e^x$ হয় এটাও মনে রেখো

$\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}x}$ এটিকে দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে বিস্তৃত করে আমরা সহজেই প্রমাণ করতে পারি $\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}x} = e^x$ আমি এখন আর প্রমান করতে যাবো না। তোমরা ইচ্ছে করলে প্রমাণ করে দেখতে পারো।

$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$ এই আকারে কোনো ফাংশন থাকলে তাকে আমরা নিচের মতো লিখতে পারি,

$$\lim_{ax\to 0}(1+ax)^{\frac{ab}{ax}} = \lim_{ax\to 0}((1+ax)^{\frac{1}{ax}})^{ab} = e^{ab}$$

যেমনঃ

$$\lim_{x\to 0}(1+3\text{x})^{\frac{5}{x}} = \lim_{3x\to 0}(1+3x)^{\frac{5\times 3}{3x}} = \lim_{3x\to 0}((1+3x)^{\frac{1}{3x}})^{15} = e^{15}$$

$$\lim_{y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{y}} = \lim_{xy\to 0}(1+xy)^{\frac{1\times x}{y\times x}} = \lim_{xy\to 0}((1+xy)^{\frac{1}{xy}})^{x} = e^{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{\frac{x}{b}} = \lim_{ax\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{\frac{ax}{ab}} = \lim_{ax\to\infty}((1+\frac{1}{ax})^{ax})^{\frac{1}{ab}} = e^{\frac{1}{ab}}$$

আকারঃ৫-

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ এই ফাংশনের লিমিটটা একটু আগেই প্রমাণ করে এসেছি।

এই ফাংশনকে ব্যস্তকরন করলেও লিমিট মানটা একই থাকে অর্থাৎ,

এই ধরনের একটা অংক দিয়ে উদাহরন দেয়া যাক, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{sinx} - 1}{sinx} = \lim_{sinx \to 0} \frac{e^{sinx} - 1}{sinx} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

ধরে নিচ্ছি $\mathrm{y} = \ln(1 + \mathrm{x}) \Longrightarrow \mathrm{e}^y = 1 + x \Longrightarrow x = e^y - 1$

এখানে $\mathrm{x} \longrightarrow 0$ হওয়ায় $e^y - 1 \longrightarrow 0$

ধরে নেয়া মান গুলো আসল ফাংশনে বসিয়ে পাই,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$$
$$= \lim_{e^y - 1 \to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1$$

আকার-৬

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{a^x(1 - \frac{1}{a^{2x}})}{a^x(1 + \frac{1}{a^{2x}})} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{a^{2x}}}{1 + \frac{1}{a^{2x}}}$$

$\lim_{x \to \infty} a^{2x}$ এর মান অনেক বড় কোনো শেষ নেই,কাজেই a^{2x} অসীম !! সুতরাং, $\frac{1}{a^{2x}} \longrightarrow 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

যে আকার গুলো দিলাম এগুলো একদম মৌলিক এগুলোকে বিভিন্ন রঙে রাঙ্গিয়ে উত্তর জানতে চাওয়া হতে পারে। তোমাদের খেয়াল রাখতে হবে।

এই অংশে ত্রিকোণমিতিক লিমিট গুলো বাদ দিয়ে গেলাম এগুলো নিয়ে বইয়ের অন্য একটা অংশে আলোচনা করা হয়েছে। কেন জানি এই অংশে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লিমিট নিয়ে আলোচনা করতে ভালো লাগছে না।

অসীম লিমিটঃ কোনো ফাংশনে একটা মানের জন্য যদি ফাংশনের গ্রাফ সংখ্যা রেখার অসীমে নির্দেশ করে তাহলে ওই লিমিটকে অসীম লিমিট বলা হয়। যেমনঃ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

আবার, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ হয় কেননা এখানে 0^- দ্বারা এখানে সংখ্যা রেখার ঋণাত্মক দিক থেকে 0 এর খুব কাছাকাছি বোঝানো হয়েছে তাই মান হবে ঋণাত্মক অসীমের কাছাকাছি।

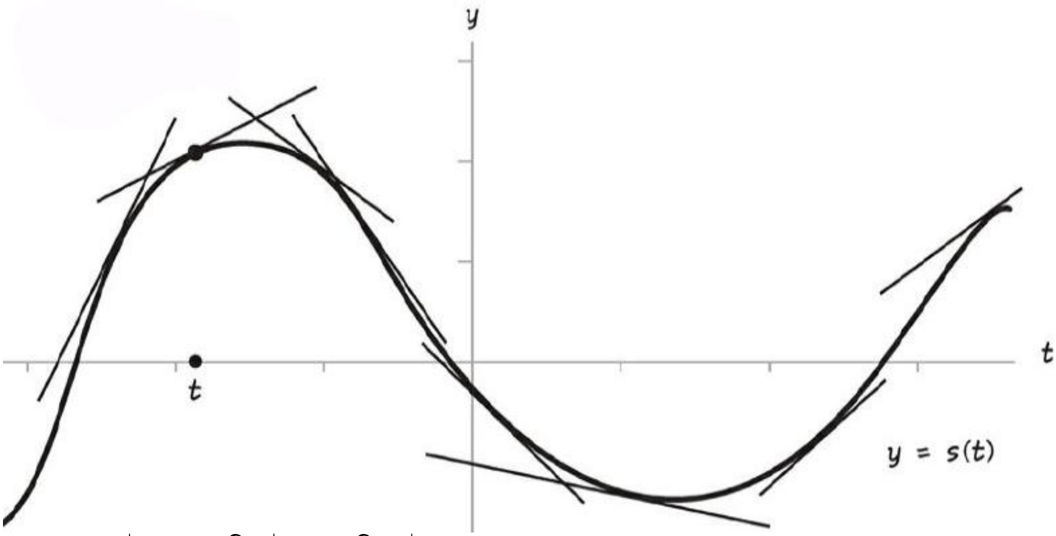
একইভাবে, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

মাঝে মাঝে অনেকে অসীম লিমিট বলতে $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}$ এই টাইপের লিমিট গুলো বুজে কিন্তু আসলে যে লিমিটের মান অসীম তাকে অসীম লিমিট বলা হয়।

লিমিটের আলোচনা এ পর্যন্তই ...

পূর্নাঙ্গ বই আসলে আরো বিস্তারিত সব কিছু দেয়ার চেষ্টা করবো ।এখানে একটা জিনিস বাদ দিয়ে গেলাম সেটা হলো ত্রিকোণমিতিক লিমিট সেটা নিয়ে সময়মত এই বইতেই আলোচনা করবো

হার বা পরিবর্তনের হার(Rate or rate of change)



খুব সহজ একটা বাংলা মুভির উদাহরন দিতে ইচ্ছে হচ্ছে।

জসিমের অভাবের সংসার। ঘরে চাল নেই, জসীম রিকশা চালিয়ে যা দিন আগে দিন খায়। একদিন বাসায় ভাত রান্নার অবস্থা নাই জসীম সারাদিনের উওয়ার্জন ৩০০ টাকা নিয়ে বাজারে গেলো চাল কিনবে বলে। তো যে দোকানে গেলো সেটা আবার ছিল নির্দয় এক ভিলেনের দোকান।

জসীম জিজ্ঞেস করলো চাল কত টাকা?

দোকানদার উত্তর দিলো ৭৫,০০০টাকা (দোকানে যত চাল আছে সব চালের দাম বলে দিলো,বাজে একটা দোকানদার সুযোগ পেলেই এমন অভাবী মানুষদের পেটে লাথি মারে)

কিন্তু জসীমের কাছে তাকা তো মাত্র ৩০০ এই দিয়ে সে কিভাবে চাল কিনবে তাহলে, তার তো দরকার মোটে ৫ কেজির মত চাল ।এখন তেমন পড়াশোনা না জানলে ৫ কেজি কিনতে কতো লাগবে সেটা বের করাও মুশকিল এদিকে ঠকানোর জন্য তো বসেই আছে বাজে দোকানদার।

বেশ ভালোই সমস্যা কিন্তু!! আচ্ছা কি এমন মহাভারত অশুদ্ধ হয়ে যেত যদি দোকানদার এভাবে বলতো চাল ৪০ টাকা কেজি। তাহলেই হয়তো জসীম বলে দিতে পারতো আচ্ছা আমাকে ৫ কেজি দিন। আর ৫ কেজির নাম হিসেব করার মতো জ্ঞান তার মোটামুটি থাকার কথা।এভাবে চালের দাম বলাতে হিসাব ও সোজা হয়ে গেল।

মানে এক কেজি চাল কিনলে কি হারে দাম দিতে হয় এটা জানলে খুব উপকার হয় তাইনা!!

এজন্যই কোনো কিছুর হার জানাটা এতো গুরুত্বপূর্ন।

এই হার হয় কিসের? ব্যাংকে সুদের হার(প্রতি ১০০ টাকায় কতো টাকা সুদ পাওয়া যাবে),জন্মহার(একটি দেশে প্রতি বছর প্রতি হাজারে কত জন শিশু জন্মগ্রহন করে),মৃত্যুহার(একটি দেশে প্রতি বছর প্রতি হাজারে কত জন শিশু জন্মগ্রহন করে),করোনা ভাইরাসের আক্রমনে প্রতিশতে কতজন করে মারা যাচ্ছে এসবই কিন্তু গুরুত্বপূর্ন হিসাব এগুলো জানা খুব দরকারি। আশা করি বুঝেছো কেন দরকারি।

আমরা যখন একটা বীজ বপন করি রাখি দুই তিন দিন পর দেখা যায় অংকুরিত হয়েছে, আস্তে আস্তে ভ্রুণ বের হয়,পাতা হয় কান্ড হয়,গাছ দিনে দিনে বড় হয়, ফল দেয়, ফুল দেয় আচ্ছা একটা গাছের চারার দিকে যদি মিনিট খানেক তাকিয়ে থাকো তাহলে ওই চারা গাছের আকৃতি কতোটা পাল্টালো বুঝতে পারা যাবে? আসলে সম্ভব না কিন্তু। কিন্তু দুই দিন পরে গিয়ে দেখলে যে চারা গাছে ১০ টা পাতা ছিল সেটাতে আরো ৩ টা নতুন কচি কচি পাতা বের হয়েছে। যদিও দুই মিনিট তাকিয়ে থেকে কিছুই বোঝা যায় নি । এসবের একটাই মানে চারা গাছ আস্তে আস্তে বড়ো হয় এর আকৃতির পরিবর্তন ঘটে সেই পরিবর্তন আমরা আপাত দৃষ্টিতে দেখতে পাই না। এটা একটু জটিল ধরনের পরিবর্তন তাই না। এসব পরিবর্তনের হার বের করতে আমাদের সাহায্য করবে ক্যালকুলাস।

এই টাইপের হ্রাস বৃদ্ধি আমরা প্রকৃতিতে আরো অনেক দেখি, একটা চলমান বস্তু সব সময় স্থান পরিবর্তন করতে থাকে। ধরো সোজা পথে একটা বস্তু চলছে সেই বস্তুটা, আমরা যখন পর্যবেক্ষণ করতে শুরু করলাম তখন মানে ০ তম সেকেন্ডে যেখানে ছিল ১ সেকেন্ড পরে আর সেখানে নেই ২ মিটার দূরে চলে গেছে। আরো এক সেকেন্ড পরে দেখা গেল ৫ মিটার দূরে চলে গেছে। এভাবে একটা করে সেকেন্ড চলে যেতে থাকলো আর বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব গুলো ক্রমাগত ৯,১৫,১৯,… আচ্ছা জানতে ইচ্ছে করছে কি তোমাদের ঐ বস্তুটা ঠিক 4.339 তম সেকেন্ডে কত বেগে চলছিল?

পিচ্চি পিচ্চি করোনা ভাইরাস কি অবস্থা করে ফেলছে মানুষদের,কারো রক্ষে নেই কাকে ঘরে আটকে রাখে নি বলো। অবশ্য ওরা কি করে জানো সব সময় দল বেধে থাকে। মুহূর্তেই বংশবৃদ্ধি করে ফেলে। একটা থেকে কয়েক কোটি হয়ে যায় কিভাবে বুঝতেও পারবে না। ওরা কেমন তাড়াতাড়ি বাড়ছে জানলে ভালোই হতো ক্যালকুলাস জানলে এই ভাইরাস ব্যাক্টেরিয়ার জন্মমৃত্যু হার ও হিসাব করতে পারবা।

চলো আরো ক্ষুদ্র জগতে দেখা যাক কি ঘটছে। ঋণাত্বক চার্জের ইলেক্ট্রন নিউক্লিয়াসের চারপাশে মেঘের মতো চক্কর কাটছে এমন জোরে চক্কর কাটে মনে হয় একই সাথে সব জায়গায় আছে নিউক্লিয়াস থেকে তার দূরত্ব ক্রমাগত পাল্টাচ্ছে বাড়ছে কমছে। কুলম্ব বলের কথা মনে আছে ওটাও নিউক্লিয়াস আর ইলেক্ট্রনের দূরত্বের বর্গের ব্যাস্তানুপাতে চেঞ্জ হচ্ছে। কিন্তু ইলেক্ট্রন ব্যাটা ঠিকই নিউক্লিয়াসে নিজের পতন রুখে দিচ্ছে। কিভাবে জানো? যখন নিউক্লিয়াসের খুব কাছে আসছে জোরে ছুটছে আবার নিউক্লিয়াস থেকে অপেক্ষাকৃত দূরে গেলে একটু আস্তে ছুটছে। কত কত জটিল রকমের পরিবর্তন। জানতে চাও কিভাবে এসব জানা চায়। শেখো ক্যালকুলাস।

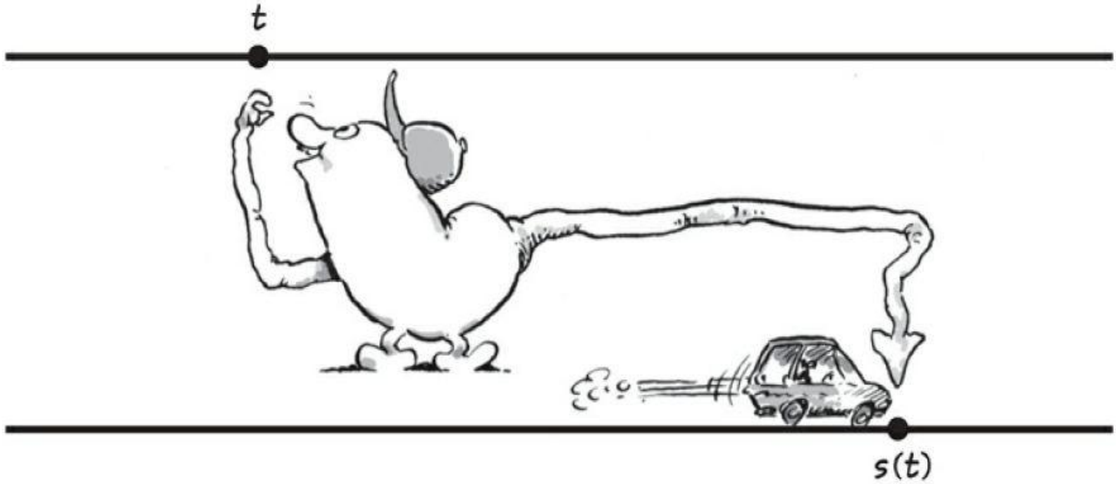
স্পেশাল রিলেটিভিটিতে জানো বেগের সাথে ভরবেগ চেঞ্জ হয়। বেগ বেশি হলে ভরবেগ চেঞ্জ হয় একটু বেশ জটিল ভাবেই। ভরবেগের এই পরিবর্তন হিসেবে রেখে গতিশক্তি বের করে দেখো,শক্তি হয়ে যাচ্ছে ভর অথবা ভর হয়ে যাচ্ছে শক্তি!! বিশ্বের অন্যতম গুরুত্বপূর্ন সত্য। প্রমাণ করতে চাও ক্যালকুলাস লাগবে।

আরো যে কত কাজ এই পরিবর্তনের হারের। সেগুলো বলে শেষ করা যাবে না। এসবের জন্যই ক্যালকুলাস এতো গুরুত্বপূর্ন।

উপরের কথা গুলো বললাম যেন তোমরা এই বইটা একটু খাও। আমার লেখা গেলানোর একটা প্রয়াস আর কি! তবে বুঝার সুবিধার্থে আমরা এতো আগেই বিশাল বিশাল কঠিন জিনিস নিয়ে কাজ করতে যাবো না। একটু সহজ পরিবর্তন নিয়ে কাজ করছি শুরুতে। সব পরিবর্তন একটা নিয়ম মেনে চলে গণিতের বেধে দেয়া নিয়ম। মানে ফাংশন!

যেমন সময়ের সাথে সাথে সমত্বরনে চলমান একটা গাড়ির বেগ পাল্টে যায়। সময়ের সাথে গাড়ি রাস্তার একই জায়গায় থাকে না। ত্বরন থাকলে রাস্তার বিভিন্ন জায়গায় গাড়ির বেগ ও বিভিন্ন হবে এইটুকু ক্লিয়ার?

গাড়ির বেগ আর অতিক্রান্ত দূরত্ব দুটোকেই আমরা সময়ের সাথে সম্পর্কিত করতে পারি। মানে অতিক্রান্ত দুরত্ব সময়ের একটা ফাংশন।



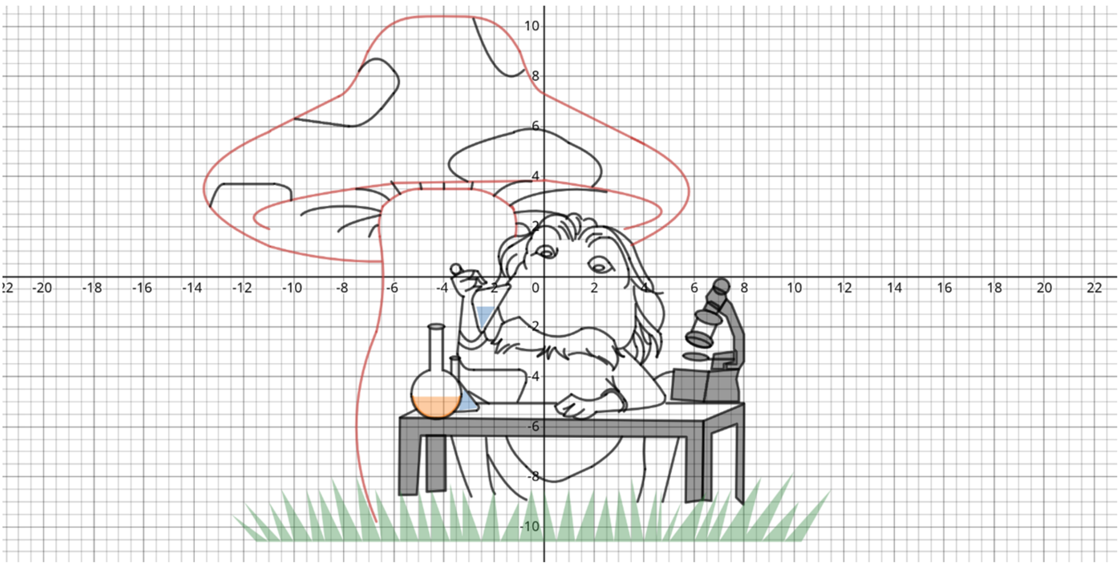
আরো একটা কথা প্রকৃতির সব কিছুকেই ফাংশন দিয়ে প্রকাশ করা যায়। ফাংশন দিয়ে সবকিছু আকাও যায়। ফাংশনের ছবি গ্রাফে একে কোথায় গ্রাফটা কি বলছে জানা যায়। কোথায় কেমন কতোটা চেঞ্জ হচ্ছে জানা যায়।

অধ্যায়–৪
অন্তরীকরণ

ক্যালকুলাস শেখার আগে যা যা দরকার ছিলো সেগুলো,কেন শেখার দরকার ক্যালকুলাস মোটামুটি জানিয়েছি। এরপরেও বাদ পরে গেছে অনেক কিছু সেগুলো যখন দরকার পরবে আলোচনা করবো আপাতত যা যা শিখিয়েছি তাতে ক্যালকুলাসের আলোচনা শুরু করা যাবে।

ক্যালকুলাস যে কাজটা করে সেটা হলো কোনো একটা ফাংশনের পরিবর্তনের হার হিসাব করতে পারে। ব্যাপারটা ক্লিয়ার নাও হতে পারে,একটু ক্লিয়ার করার চেষ্টা করি।

পৃথিবীতে যা কিছু ঘটে তার প্রত্যেকটা জিনিস একটা গাণিতীক ফাংশন দ্বারা প্রকাশ করা যাবে সেটা যাই হোক। নিচের ছবিটা **ব্যাঙের ছাতার বিজ্ঞান** গ্রুপের লোগো। অসাধারণ কম্পলেক্স এই লোগোটাকেও শুধুমাত্র গাণিতীক সমীকরণ ব্যবহার করে ফুটিয়ে তোলা সম্ভব হয়েছে। গ্রাফে যেকোনো কিছুই আকা যায় প্রমাণ হিসেবে ছবিটা দিলাম।

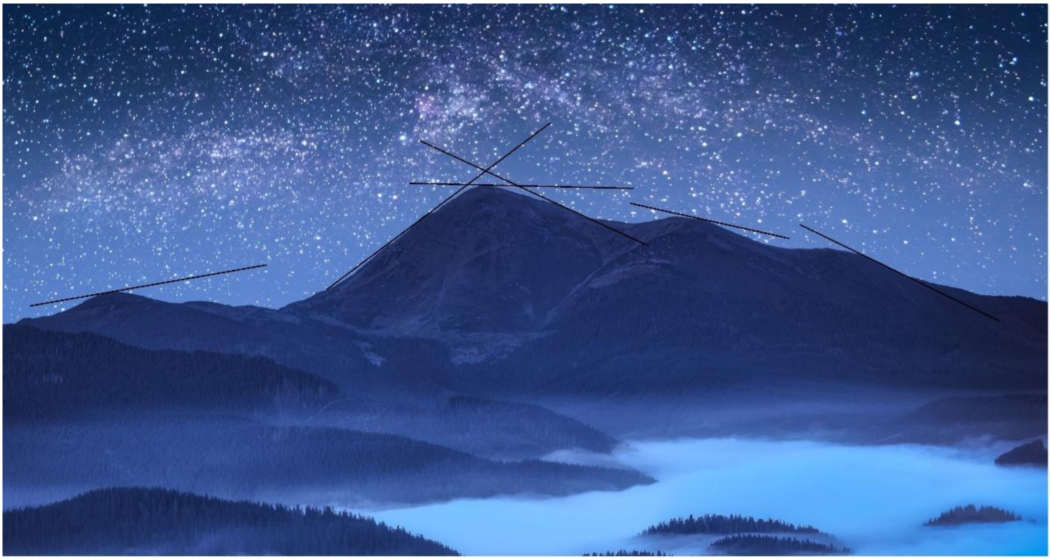


Graph Credit:Atikuzzaman Azad

গ্যালিলিও একটা কথা বলেছিলেন সেটার অর্থ এই রকমঃ "সৃষ্টিকর্তা যে ভাষায় মহাবিশ্ব রচনা করেছেন তার নাম গণিত।" সেই কথাটাই প্রমাণ করে ফাংশনের স্কেচ। প্রতিটা ফাংশনের জ্যামিতিক প্রকাশ হচ্ছে গ্রাফ। আমরা বাস্তব জীবনের কোনো কিছু যখন গাণিতীক ফাংশন রূপে আলোচনা করছি তখন আসলে গ্রাফ আকবো এটাই গাণিতীক ভাবে বিষয়টা ফিল করার সবচেয়ে ভালো উপায়।

মনে আছে তো কোনো কিছু বাড়ছে নাকি কমছে,কোথায় কি পরিমানে বাড়ছে বা কমছে এসব জিনিস জানা কেন গুরুত্বপূর্ন বলেছিলাম। তোমরা ফাংশনের স্কেচ দেখে থাকবে সেটা কখনো সরল রেখার মতো উঠে যাচ্ছে,কখনো ঢেউ খেলছে,কখনো বক্ররেখা,বেশ জটিল জটিল টাইপের বক্ররেখার দেখাও মিলে কখনো কখনো,কেউ কেউ আবার বিচিত্র আকার আকৃতি সৃষ্টি করে। কথায় বাড়ছে কোথায় কমছে সেটা বুঝতে সবচেয়ে ভালো উপায় ঢাল। চলো জেনে আসি ঢাল জিনিসটা কি?

ঢাল নির্ণয়ের ইতিবৃত্ত(The story of Slope)



পাহাড় তো দেখেছো অনেক উচু। কিন্তু পাহাড় নিয়ে আরো একটা কথা শুনে থাকবা এই টাইপের যে এই পাহাড়টা মাত্র ৫০০ মিটার উচু হলেও প্রচন্ড ঢালু উঠা খুব কষ্টকর,আবার কোনো কোনো পাহাড় ৪-৫ কিলোমিটার উচু কিন্তু সহজেই চড়া যায় কম ঢালু। আবার পাহাড় কোথাও খুব বেশি ঢালু কোথাও খুব কম ঢালু,কোনো অংশ চড়তে খুব কষ্ট কোনো অংশে চড়তে বেশি কষ্ট তাইতো। ঢাল হচ্ছে পাহাড়ের উচ্চতার পরিবর্তন হার। যদি একটা পাহাড় ভূমির সাপেক্ষে খুব ধীরে ধীরে উচু হতে থাকে তাহলে তার ঢাল কম আর হঠাত খুব বেশি উচু হয়ে গেলে তার ঢাল বেশি। পায়ে হেটে উচু জায়গায় (পাহার বা ঢিবি টাপের) উঠার অভ্যাস থাকলে বুঝতে পারবা ঢাল কি জিনিস।

গণিতে আমাদের গ্রাফগুলোও এমন সব পাহাড়! বিচিত্র তাদের আকার আকৃতি। কিন্তু চড়া যায় না এসব পাহাড়ে। কোথায় কতোটা উচু তা জানতে ঢাল নির্নয় করা হয়। ছবিতে একটা পর্বত দেখিয়েছি সেখানে দেখো বিভিন্ন জায়গায় ঢাল বিভিন্ন রকমের আরো একটা জিনিস খেয়াল করো ঢাল প্রকাশে একটা সরল রেখা ব্যবহার করা বেশ সুবিধাজনক। কোনো বিন্দুর ঢাল ওই সরল রেখার ঢালের সমান।

গ্রাফে আকা বক্ররেখার ঢাল লক্ষ্য করো। সরল রেখার ঢালের সঙ্গা থেকে আমরা জানি,ঢাল হলো ভূমির সাপেক্ষে উচ্চতা কি হারে পরিবর্তিত হচ্ছে তার পরিমান। সরল রেখার ঢাল প্রকাশের জন্য সবচেয়ে ভালো উপায় হলো ওই সরল রেখা x অক্ষের ধণাত্বক দিকের সাথে কতো কোণ তৈরী করে তা দিয়ে প্রকাশ করা।

আমাদের আজকের উদ্দেশ্য যেকোনো ফাংশনের নির্দিষ্ট বিন্দুতে ঢাল বের করা এর জন্য সবচেয়ে ভালো একটা উদাহরন সময়ের সাথে একটা গাড়ির অবস্থানের পরিবর্তন। মনে করো গাড়িটি x অক্ষ বরাবর চলমান।

নিচের টেবিলে সময় আর অবস্থান লক্ষ্য করোঃ

সময় (t)	0	1	2	3	4	5
অবস্থান(s)	0	5	10	15	20	25

এবার এই টেবিলের জন্য গ্রাফটা লক্ষ্য করো। গ্রাফটা একটা সরল রেখা

এই গ্রাফ থেকে যদি বলি গাড়িটার বেগ কতো?

বেশ সহজেই করে ফেলা যাবে, সিম্পলি বেগ$= \frac{\text{মোট দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}} = \frac{25-0}{5-0}$ একক

এইযে বেগের মানটা পেলাম এটা কিন্তু নির্দিষ্ট কোনো বিন্দুর জন্য নয়। বেগের একটা গড় মান পেয়েছি। যেহেতু এই গ্রাফটা একটা সুন্দর সরল রেখা তাই এখানে গড় বেগ ও যা নির্দিষ্ট যেকোনো বিন্দুতে বেগ ও তাই। গ্রাফটার আরো কিছু জায়গা থেকে যদি ঢাল বের করি তাহলে বুঝতে পারবে,

$\frac{15-10}{3-2} = \frac{20-15}{4-3} = \frac{25-20}{5-4} = 5$ একক

এখানে প্রতিক্ষেত্রেই বেগ 5 একক!! যেকোনো সময় ব্যবধানে বেগ বের করে দেখো একই ফলাফল আসবে।

তোমরা এমনিতেই বুঝে গেছো ব্যাপারটা কি, আসলে এখানে দূরত্ব আর সময় একটা সরল সম্পর্ক মেনে চলছিল তা হলো,t সেকেন্ড সময়ে দূরত্ব যদি s হয় তাহলে $s=5t$

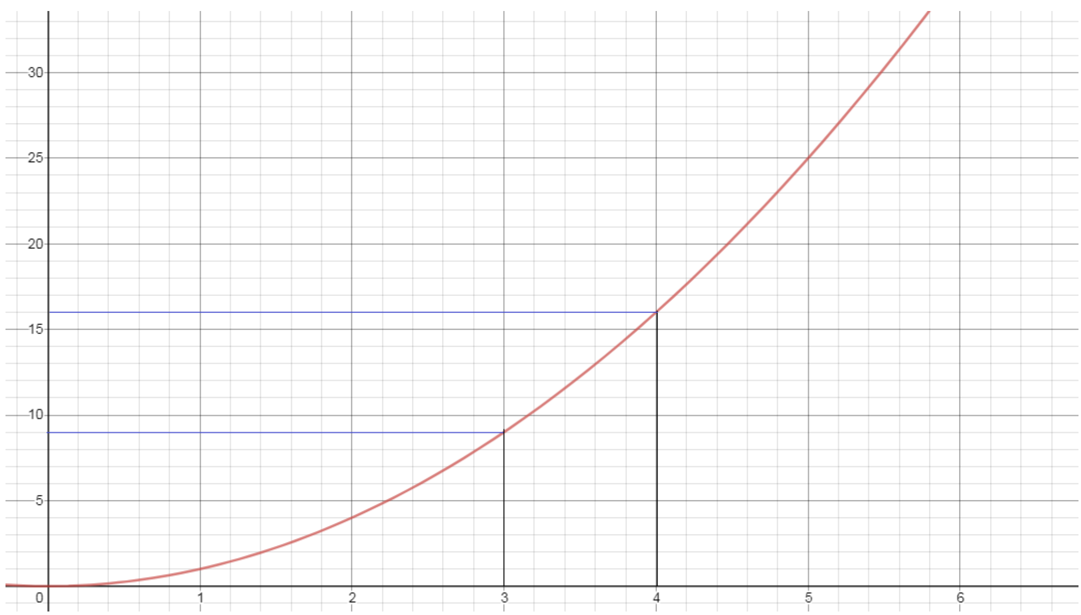
এবার ব্যাপারটাকে আরেকটু কঠিন করা যাক। এবারে গাড়িটা দূরত্ব আর সময়ের একটু কঠিন সম্পর্ক মেনে চলছে। নিচের টেবিলে t সময়ে x অক্ষ বরাবর গাড়ির অবস্থান(s) দেখানো হলোঃ

সময় (t)	0	1	2	3	4	5
অবস্থান(s)	0	1	4	9	16	25

সময়ের সাথে গাড়িটার অতিক্রান্ত দূরত্ব এবার কি নিয়ম মানছে আশা করি বুঝতে পেরেছো। t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = t^2$ এবারেও যদি উপরের টেবিল থেকে গ্রাফ আকি তাহলে নিচের মতো একটা গ্রাফ পাওয়া যাবে

কিন্তু এই গ্রাফটা আগের মতো এতো সহজ সরল না। এর ঢাল থেকে বেগ নির্নয় করা যাবে কিন্তু সব জায়গায় ঢাল কিন্তু সমান হবে না। নতুন একটা সমস্যা কি করা যায়?

যদি আগের নিয়মে ঢাল বের করার চেষ্টা করি তাহলে কি ঘটে দেখা যাকঃ



ইতিমধ্যে আমরা জেনে গেছি গাড়িটার t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s = t^2$

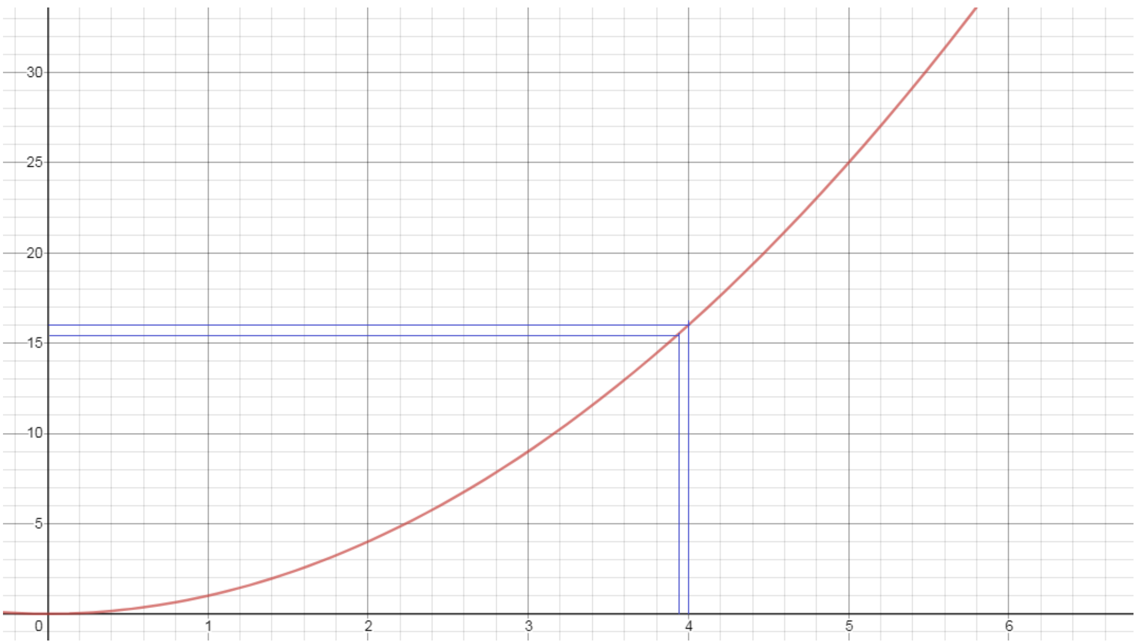
এবার, 3 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s_3 = 3^2$

4 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s_4 = 4^2$

এখান থেকে 3-4 সেকেন্ড সময়ের মধ্যে গড় বেগ বের করা যাবে ,

৩-৪ সেকেন্ড সময়ের মধ্যে গড় বেগ$= \frac{s_4 - s_3}{4-3} = \frac{16-9}{1} = 7$ একক

এটা কিন্তু শুধুই গড় একটা মান। এই বেগটা আলাদাভাবে ৩ সেকেন্ডের জন্যও নয় আবার ৪ সেকেন্ডের জন্যও নয়। এখন যদি বলা হয় ঠিক 4 তম সেকেন্ডে বেগ কতো তাহলে?



উপায়টা হলো যে গড় মানটা বের করছি সেটা শুধুই একটা বিন্দুর জন্য বের করবো। ছবিতে দেখো আস্তে আস্তে সময় ব্যবধান কমিয়ে আনা হচ্ছে মনে করো 3.9 থেকে 4 সেকেন্ড সময়ের জন্য গড় বেগ বের করা হচ্ছে এবার তাহলে যে মানটা পাওয়া যাবে তাহলো এই 0.1সেকেন্ড সময়ের মধ্যে গড় বেগ। যদি আরো আরো কমিয়ে আনি এই ব্যবধান তাহলে কেমন হয়,

ধরো 3.99 থেকে 4 সেকেন্ডের মধ্যে বেগ বের করলাম তাহলে 0.01 সেকেন্ড সময়ের মধ্যে গড় বেগ পাওয়া যাবে এভাবে যদি সময় ব্যবধানকে কমাতে থাকি তাহলে একদম অতিক্ষুদ্র সময় ব্যবধানে বের করা সম্ভব হবে। যদি এই ব্যবধান ০ করেই দেই তাহলে একদম খাপে খাপ!! সেটাই তো ঘটার কথা তাই না?

ওইদিকে এই কাজটা করলে গ্রাফে সময়ের অক্ষে আকা লম্ব গুলো একদম মিলে যাবে যেখানে মিলবে সেই বিন্দুর স্পর্শকের ঢাল পাওয়া যাবে।

আমরা সেই কাজটাই একটু গাণিতীক ভাবে করে ফেলছি,

t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s(t)=t^2$

t সময় থেকে h সময় পরে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s(t+h)=(t+h)^2$

তাহলে (t+h) এবং t সময় ব্যবধানে গড় বেগ অথবা, গ্রাফের গড় ঢাল অথবা,গড় পরিবর্তন হার v ধরে নিলাম,যেহেতু বেগ বের করছি তাই v এর আর কোনো অর্থ নেই

$$v = \frac{s(t+h)-s(t)}{(t+h)-t}$$

$$v = \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

কিন্তু এতো গ্লুকোজ পুরিয়ে মাথা ঘামিয়ে কি পাওয়া যাবে h সময়ের মধ্যে বেগের একটা গড় মান। তাতে লাভ নেই আমাদের দরকার ঠিক t সময়ে বেগের মান। একটু আগে বলেছি যদি h কে ক্ষুদ্রতর করতে পারো আরো ক্ষুদ্র করতে থাকো করতে করতে একদম ০ বানাও তাহলেই t সময়ে আসল বেগের মান পাওয়া যাবে।

এর অর্থ $\lim h \longrightarrow 0$ বানিয়ে ফেলতে হবে।

কিন্তু সরাসরি $v = \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ রাশিটাতে h=0 বসিয়ে দিয়ে দেখো কি পাওয়া গেল 0/0=অসঙ্গায়িত!!

তাই আগেই h এর মান 0 বসানো যাবে না,একটু কৌশলে হিসাব নিকাশ করে বসাবো। চলো করে ফেলি,

$$v = \frac{(t+h)^2 - t^2}{h}$$

$$\Longrightarrow v = \frac{t^2 + 2ht + h^2 - t^2}{h}$$

$$\Longrightarrow v = \frac{h(2t+h)}{h} \Longrightarrow v = 2t + h$$

এবার, $\lim h \longrightarrow 0 \;\Longrightarrow v = 2t + h$ হিসাব করলে পাবো, v=2t

এবার বলো কোন বিন্দুতে বেগ বের করতে চাও,খুব সহজেই বলে দেয়া যাচ্ছে t সময়ে বেগ v=2t

বেগ তো বের করা শেখানো হলো,এবার দেখো আমরা ভিতরে কিছু কাজ করেছিলাম বার বার এই জিনিস গুলো এতো বড় বড় প্রতিক ব্যবহার করে করা বেশ কঠিন তাই একটু সহজ করা হয়েছে।

১।h এর পরিচয়ঃh খুব ক্ষুদ্র একটা ধণাত্বক সংখ্যা একদম যত ক্ষুদ্র হওয়া সম্ভব মানে সহজ ভাবে এটাকে লিখা হয় $\lim h \longrightarrow 0$.না বুঝলে লিমিটের পর্বটা দেখে আসতে পারো।

২। h যেহেতু খুব ছোট তাই সময় ব্যবধান ও খুব ছোট হবে খুব ছোট জিনিস প্রকাশ করার জন্য সাধারণত Δ ব্যবহার করা হয় এজন্য বলা যেতে পারে সময় ব্যবধান Δt । এই জিনিসটাকে সাধারণত লেখা হয় dt

৩।যেহেতু খুব ক্ষুদ্র সময় ব্যবধানে অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করা হয় তাই এই দূরত্বও খুব ছোট হওয়ার কথা এজন্য এটাকেও লিখা হয় Δs সাধারণভাবে ds

এবার উপরের নিয়ম গুলো অনুসরন করে গ্রাফের ঢাল নির্নয়ের গাণিতীক ব্যাপারটিকে লিখা যাবে, $\mathrm{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

অথবা, $\mathrm{v} = \frac{ds}{\mathrm{d}t}$

এতোক্ষণ যে কাজ গুলো করলাম সেগুলো সব একটা বিশেষ ঘটনাকে কেন্দ্র করে, সাধারণ ফাংশনের জন্যও সব নিয়ম গুলো একই।

ফাংশনকে সাধারণত প্রকাশ করা হয় $y=f(x)$ এভাবে কেন এভাবে আগের পর্ব গুলোতে বলেছি।

এবার y ফাংশনটির জন্য যদি গ্রাফ একে তার ঢাল বের করতে বলা হয় তাহলেও একই নিয়ম,

আগের নিয়ম গুলো যদি বুঝে থাকো তাহলে x বিন্দুতে ফাংশনের ঢাল,

$$\frac{dy}{dx} = \lim h \longrightarrow 0 \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$ এর পরিচয়ঃ

১। x বিন্দুতে y ফাংশনের গ্রাফের ঢাল বা পরিবর্তনের হার।

২। x এর সাপেক্ষে y বা, f(x) এর অন্তরক।

৩। ক্যালকুলাসের একটা চিহ্ন

৪। $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ সম্পর্কে এতোক্ষণ যা বললাম তাতে মনে হচ্ছে এটা একটা ভগ্নাংশ তাইতো আসলেও এটা একটা ভগ্নাংশ এর সব আচরণ ভগ্নাংশের মতো সেটা পরে দেখাবো। তবে কখনো কখনো এটাকে $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$ এই রূপে ডিফারিয়ান্সিয়াল অপারেটর হিসেবেও ব্যবহার করা হয়,তখন এটা ভগ্নাংশ নয় একটা অপারেটর। $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{f(x)}$ দ্বারা f(x) এর অন্তরক বোঝানো হয়। f(x) এর অন্তরককে বোঝানোর আরো কিছু উপায় আছে যেমনঃ $\mathrm{f}'(\mathrm{x}), Df(x), \mathrm{f}^{\mathrm{i}}(\mathrm{x})$[i এখানে রোমান 1 এর দ্বারা প্রথম অন্তরক বোঝায়]

এবার ধরো একটা ফাংশন, $f(x) = x^3$ এর অন্তরক বের করতে হবে,

আগে ব্যাসিক ক্লিয়ার করে এসেছি আমরা এখন ক্লাসিক অংক করার মতো সোজা সূত্রে চলে যাবো,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim h \longrightarrow 0 \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\Longrightarrow \lim h \longrightarrow 0 \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim h \longrightarrow 0 \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$= \lim h \longrightarrow 0\ (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

এবারেও এই সিম্পল ফাংশনের অন্তরক বের করার জন্য প্রচুর খাটতে হয়েছে। কিন্তু এটা কিছুই না এর চেয়েও অনেক জটিল ফাংশনের অন্তরক বের করার প্রয়োজন পরে বিভিন্ন ক্ষেত্রে বার বার এতো কষ্ট তো আর করা যায় না। তাই এই টাইপের ফাংশন গুলোর জন্য একটা সহজ সূত্র বের করে ফেললে কেমন হয়?
চলো করে ফেলি,

মৌলিক কিছু ফাংশনের অন্তরীকরণ*(*Derivates of Basic Functions*)*

এবার ধরো, $f(x) = x^n$

এই সূত্রটা প্রমাণের জন্য পকেটে রাখতে হবে বাইনোমিয়াল থিওরেম। রেখে দিও কিন্তু। এবার দেখো

$$\frac{d}{dx}x^n = \lim h \longrightarrow 0 \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim h \longrightarrow 0 \frac{x^n + nx^{n-1}h^1 + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim h \longrightarrow 0 \frac{h\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim h \longrightarrow 0\; nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} = nx^{n-1}$$

আশা করি ভেতরের হিসাব গুলো ক্লিয়ার, এখন থেকে

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{x}^{\mathrm{n}}$এমন কোথাও দেখলে সোজাসুজি $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{x}^{\mathrm{n}} = \mathrm{nx}^{\mathrm{n}-1}$ লিখবা n এর মান যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে , বাসায় n=-1/2,-1/3,1/2 এই মান গুলোর জন্য খাতায় অংক কষে দেখো ।
আচ্ছা এবার বলো একটা সমতল মেঝের কি কোনো ঢাল থাকে?সিড়িতে উঠতে যেমন কষ্ট হয় মেঝেতে চলতে কি তেমন কষ্ট করতে হয়?

হয় না তাই তো। এর অর্থ হলো সমতল মেঝের ঢাল শূন্য। একই ভাবে যদি গ্রাফে একটা অক্ষের সমান্তরাল রেখা আকা হয় তার বেলায় ও একই জিনিস সত্যি হবে। অক্ষের সমান্তরাল রেখা বলতে বোঝাচ্ছি x=5,y=7 এই টাইপের রেখা গুলো। এদের গ্রাফে তাকালে দেখতে পাবে এরা সমগ্র গ্রাফ জুড়ে একই x বা y এর মান পরিবর্তন করলে এদের মান পাল্টায় না। এরা ধ্রুব। অর্থাত,ধ্রুবকের ঢাল শূন্য।

যদি c একটা ধ্রুবক হয় $\frac{d}{dx}c = 0$

কোনো ফাংশনের সাথে ধ্রুবক গুন হয়ে আছে কি করবো?

এতো অতি সহজ জিনিস ধ্রুবক কখনোই পরিবর্তিত হতে চায় না সব সময় একই রকম থাকতে চায় তাকে একপাশে সরিয়ে ওইভাবেই রেখে দাও। নিচের উদাহরনটাতে c ধ্রুবকটা f(x) এর সাথে গুন হয়ে আছে। এর অন্তরিকরণ হবে এভাবেঃ

$$\frac{d}{dx}cf(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c.f(x+h) - c.f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow c\left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$\Rightarrow c\frac{d}{dx}f(x)$$

এই নিয়ে আর বেশি কথা বলার দরকার হবে না আশা করছি। এবার আশি অন্য এক কেসে যদি এমন হয় একই চলকের দুইটা ফাংশন যোগ আকারে আছে তার অন্তরক কি হবে? অথবা একই চলকের ফাংশন গুলো পরস্পরের মধ্যে বিয়োগ,গুন,ভাগ আকারে আছে তাহলে সেক্ষেত্রে অন্তরক কিভাবে বের করতে হয়? সেই আলোচনায় যাবো তবে তার আগে বলে দেই প্রতিক্ষেত্রেই একটা ফাংশন ব্যবহার করা হয়েছে h(x)। প্রতিটা h(x) কিন্তু আলাদা অর্থ বহন করবে এইটা মনে রেখো।

ফাংশনের যোগফলের অন্তরীকরণঃ

ধরো, $h(x) = f(x) + g(x)$ আমাদের বের করতে হবে $\frac{d}{dx}\big(f(x) + g(x)\big)$

এবার নিচের মতো করে কাজ গুলো করে ফেলোঃ

$$\frac{d}{dx}\big(f(x) + g(x)\big)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)]$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] + \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[g(x+h) - g(x)]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

এবার পেয়ে গেলাম, $\frac{d}{dx}\big(f(x) + g(x)\big) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$

ফাংশনের বিয়োগফলের অন্তরীকরণঃ

$h(x) = f(x) - g(x)$ আমাদের বের করতে হবে $\frac{d}{dx}\big(f(x) - g(x)\big)$

এটা পানির মতো সোজা নিজেরা করে নাও, উত্তরটা হবে $\frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$

খাতায় নিচের রাশিগুলোকে অন্তরীকরণ করতে পারো,

$$x^3 + 4x + 7, 4x^5 + 3x^2 - 5x + \frac{1}{x}$$

ফাংশনের গুনফলের অন্তরীকরণঃ

এক্ষেত্রে,$h(x) = f(x)g(x)$ এর অন্তরিকরণ কিভাবে তা জানতে নিচের সহজ কাজ গুলো করে ফেলোঃ

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}h(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)]$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)]$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[f(x)\big(g(x+h) - g(x)\big) + g(x+h)\big(f(x+h) - f(x)\big)\Big]$$

$$\Rightarrow f(x)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[g(x+h) - g(x)] + \lim_{h\to 0}g(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)]$$

$$= f(x).\frac{dg(x)}{dx} + \frac{df(x)}{dx}.g(x)$$

এবার,f(x)g(x)h(x) এর অন্তরক কি হবে বলতে পারো?

এর জন্য প্রমাণে যাওয়ার দরকার নাই বুঝে থাকলে সিম্পলি বলে দিতে পারবা,

$$\frac{d}{dx}f(x).g(x).h(x) = \frac{df(x)}{dx}.g(x).h(x) + f(x).\frac{dg(x)}{dx}.h(x) + f(x).g(x).\frac{dh(x)}{dx}$$

বসে বসে প্র্যাক্টিসের জন্য নিচের রাশিগুলোকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করো

$$(t+3)(\mathrm{t}-3), (t^2 - 3\mathrm{t} + 4)(\mathrm{t}-2)(3t^2 + 6)$$

ফাংশনের ভাগফলের অন্তরীকরণঃ

এইবার,$\mathrm{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ এই ফাংশনটিকে অন্তরীকরণ করার জন্য নিচের নিয়মঃ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(g(x)\right)^2}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x) - f(x)g(x)]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(g(x)\right)^2}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[g(x)\left(f(x+h) - f(x)\right) - f(x)\left(g(x+h) - g(x)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(g(x)\right)^2}[g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

প্র্যাক্টিসঃ

$$\boxed{\frac{x-4}{x+3}, \frac{16x}{x^2-4}}$$

এতক্ষণ যা শিখালাম তার মাধ্যমে পদার্থবিজ্ঞানের ছোট একটা সূত্র প্রমাণে ক্যালকুলাসের ব্যবহার দেখানো যাকঃ

তোমরা জানো,u আদিবেগ নিয়ে a সমত্বরনে t সময় চলার পর কোনো বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব যদি s হয়,তাহলে

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

এবার জানো তো সময়ের সাথে দূরত্বের পরিবর্তনের হারই হলো বেগ। যদি t সময়ে ঐ চলমান বস্তুর বেগ v হয় তাহলে ক্যালকুলাস ব্যবহার করে লিখা যাবে,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

অল্প একটু অন্তরীকরণ জানলেই বেগের সেই পরিচিত সমীকরণটা বের করে ফেলতে পারবা নিচের মতো করে,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}ut + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}at^2$$

$$\Longrightarrow v = u + at$$

এতোক্ষণ যা যা বলেছি আশা করি বুঝেছো।

সূচক ও লগারিদমিক ফাংশনের অন্তরীকরণ(Differentiation of Exponential and logarithomic Function)

এর আগে যেসব ফাংশনের অন্তরক বের করা শেখানো হয়েছে সেইগুলোতে কখনোই চলক ঘাত রূপে ব্যবহার হয় নি,কিন্তু এবার হতে যাচ্ছে।

ধরে নাও,এবারের ফাংশনটা $y = a^x$

এই ফাংশনের অন্তরক বের করার জন্য a^x কে অসীম ধারায় বিস্তৃত করার প্রয়োজন পরে এজন্য নিজের পদ্ধতিটা কাজে লাগে। আগে বিস্তারিত শিখিয়েছি তাই এখন সরাসরি লিখে দিলামঃ

$$y = a^x$$

$$= e^{xlna}$$

$$= e^{xlna} = 1 + \frac{xlna}{1!} + \frac{(xlna)^2}{2!} + \frac{(xlna)^3}{3!} + \cdots$$

এবার নিয়ম অনুসারে নিচের কাজগুলো করে ফেলছি,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} a^x . \lim_{h \to 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$$

এবার a^h কে অসীম ধারায় বিস্তৃত করার পালা সেটা এভাবে,

$$a^h = e^{hlna} = 1 + \frac{hlna}{1!} + \frac{(hlna)^2}{2!} + \frac{(hlna)^3}{3!} + \cdots$$

এখন আবার আগের মতো কিছু হিসাব নিকাশ করে ফেলতে হবে তাহলেই কাজ শেষ।

$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(1 + \frac{hlna}{1!} + \frac{(hlna)^2}{2!} + \frac{(hlna)^3}{3!} + \cdots - 1 \right)$$

$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} . h \left(\frac{lna}{1!} + \frac{h(lna)^2}{2!} + \frac{h^2 (lna)^3}{3!} + \cdots \right)$$

$$= a^x . lna$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x . lna$$

এবার দেখাবো কেন শকুনের দোয়ায় গরু মরে না। এই জিনিস নিয়ে অনেক মিমে পর্যন্ত তৈরী হয় আমাদের গরুটা হলো e^x আর তার উপর শকুনের দোয়া হচ্ছে ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর $\frac{d}{dx}$

আমাদের এই গরুর উপর শকুনের কুদৃষ্টির ফল হলো $\frac{d}{dx} e^x$ কিন্তু দেখার বিষয় এটাই গণিতীক অভিশাপের মাধ্যমে শকুন গরুর কিছু করতে পারে কিনা? গ্রাম বাংলার প্রচলিত সেই প্রবাদটা জানো তো “শকুনের দোয়ায় গরু মরে না।”

এবারের জন্য আমাদের $y = e^x$

একটা জিনিস লক্ষ্য করো আগে যে অন্তরকটা বের করলাম সেখানে জাস্ট $a = e$ বসিয়ে দিলেই ফলাফল চলে আসবে। সেটাই করছি তাহলে দাড়াচ্ছে,

$$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}lne \ \ [lne = 1]$$

দেখলে তো আগের দিনের প্রবাদ গুলো খুব একটাও মিথ্যে নয়!! গণিত ও তাই প্রমাণ করে দিলো। শকুনের চোখ পাকিয়ে তাকানো গরুর কিছুই করতে পারে না!!

চলো আরেকটু ভালো ভাবে e^{x} এর অন্তরক বের করে দেখানো যাক। এবারে অসীম ধারায় বিস্তৃত করে,নিচের মতো

$$y = e^{x}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x}e^{h} - e^{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x}(e^{h} - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}e^{x}.\lim_{h\to 0}\frac{(e^{h} - 1)}{h}$$

$$= e^{x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{(h)^{2}}{2!} + \frac{(h)^{3}}{3!} + \cdots - 1\right)$$

$$= e^{x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.h\left(1 + \frac{\mathrm{h}}{2!} + \frac{h^{2}}{3!} + \cdots\right)$$

$$= e^{x}.1$$

এবারেও একই ফলাফল, $\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$

পরের প্রমাণটা বুঝতে হলে একটা জিনিস জানতে হবে,সেটা হলো ফাংশন আর বিপরীত ফাংশনের অন্তরকের মধ্যে সম্পর্ক। এর আগে বলেছিলাম $\frac{dy}{dx}$ একটা ভগ্নাংশ। কারন এর উপরের অংশটা চলকের ক্ষুদ্র পরিবর্তনের সাপেক্ষে ফাংশনের পরিবর্তন আর নিচে চলকের ক্ষুদ্র পরিবর্তন।

যেকোনো ফাংশন $y = f(x)$ এর জন্য এটাকে এভাবে লিখা হয়,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

উভয় পক্ষকে ব্যস্তকরন করে লিখতে পারি,

$$\Longrightarrow \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{dx}{df(x)}$$

অর্থাৎ,x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরক বের করার মাধ্যমে একটু কৌশল খাটালে y এর সাপেক্ষে x এর অন্তরক বের করা সম্ভব ।তবে একটা জিনিস মনে রাখতে হবে y=f(x) হলেই এটা সম্ভব আবার একই সাথে x কে y এর বিপরীত ফাংশনও হতে হবে।

আমাদের এবারের ফাংশন $y = lnx$

এখান থেকে x এর মান অর্থাৎ, y এর বিপরীত ফাংশনটা বের করে নিচ্ছি

$$\Longrightarrow x = e^y$$

তারপর সেই ফাংশনকে y চলকের সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে নিচ্ছি,এভাবে পাওয়া যাবে $\frac{dx}{dy}$ এই জিনিসটাকে ব্যস্তকরন করে দিলেই পেয়ে যাবো আমাদের কাঙ্ক্ষিত, $\frac{dy}{dx}$

$$\Longrightarrow x = e^y$$
$$\Longrightarrow \frac{dx}{dy} = e^y$$
$$\Longrightarrow \frac{dx}{dy} = x$$
$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$
$$= \frac{1}{x}$$

ফলাফল,$\frac{d}{dx} lnx = \frac{1}{x}$

এবারের ফাংশনটা $y = \log_a x$,এই ফাংশনের অন্তরীকরন অসীম ধারা ব্যবহার করে করা হয় প্রায় জায়গাতেই তবে সেই অসীম ধারা বের করা এখনো শেখাই নি। তাই একটু অন্যরকম উপায়ে কাজটা করছি। নিচের কাজ গুলো দেখলে আশাকরি বুঝবে,

$$y = \log_a x$$
$$\Rightarrow y = \frac{lnx}{lna}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{lna}\frac{d}{dx}lnx$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xlna}$$

এটাকে অনেকে একটু অন্যভাবে লিখতে চায় এজন্য আবার নিচের অতিরিক্ত কাজ গুলো করতে হয়,

$$lna = \log_e a = 1/\log_a e$$

এভাবেও লিখতে পারো,

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$$

একটুখানি প্র্যাক্টিক্যাল

আসলে কোনো ফাংশনের অন্তরকের দ্বারা আমরা কি বের করতে পারি? জানো?

সেটা হলো ঐ ফাংশনের কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে সরল রেখার ঢাল!!

ধরো,আমাদের ফাংশন $y = x^3$ এই ফাংশনে যদি x=2 হয় তাহলে, y=8 আমাদের উদ্দেশ্য x=2 হলে স্পর্শকের ঢাল কতো হবে সেটা বের করা। এবং ঐ(2,8) বিন্দুতে যে সত্যি সত্যি স্পর্শকের ঢাল বের করতে পারছি সেটা দেখানো। এটার জন্য সবচেয়ে ভালো হয় ফাংশনের গ্রাফ একে (2,8) বিন্দুতে স্পর্শক একে দেখানো। চলো সেটা করে ফেলা যাকঃ

মনে করো, (2,8) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে $y = mx + c$ এখানে m স্পর্শকের ঢাল। তাহলে m=$\frac{dy}{dx}$ এইটুকু তো ক্লিয়ার। ঢালটা বের করে নিচ্ছি,

$$y = x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

যেহেতু,x=2 কাজেই ঢালের সাংখ্যিক মান $m = 3(2)^2 = 12$

এবার যে স্পর্শক হবে সেটা(2,8) বিন্দুগামী স্পর্শকের জন্য ধরে নেয়া সমীকরণ থেকে c এর মানটা বের করা যাক,

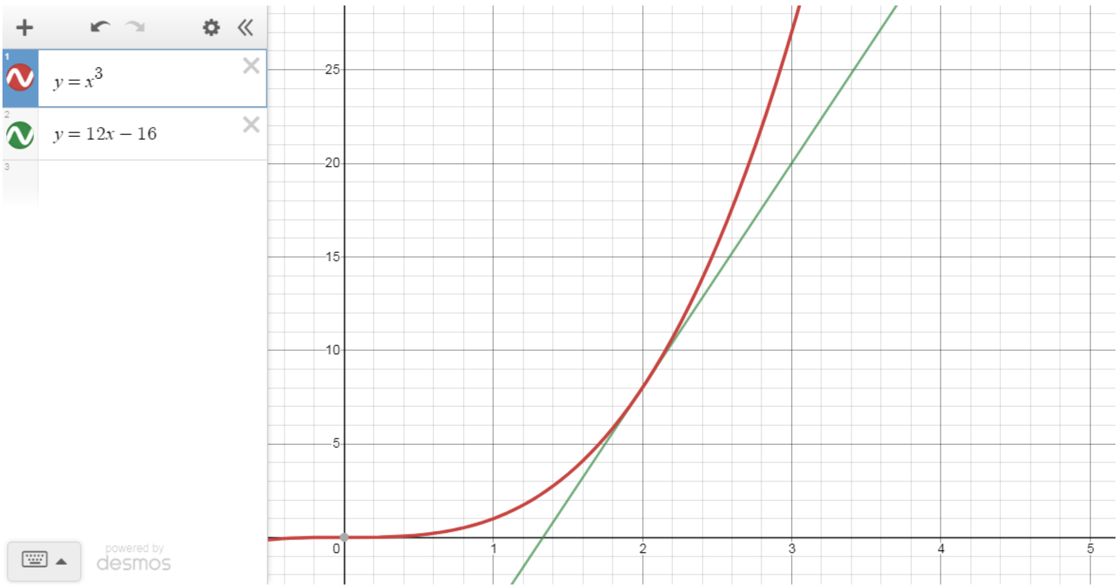
$8 = 12 \times 2 + c \implies c = 8 - 24 \implies c = -16$

C এবং m এর মান স্পর্শকের সমীকরণে বসিয়ে দিলেই স্পর্শকের সমীকরণটা পাওয়া যাবে,

$$\mathrm{y} = 12\mathrm{x} - 16$$

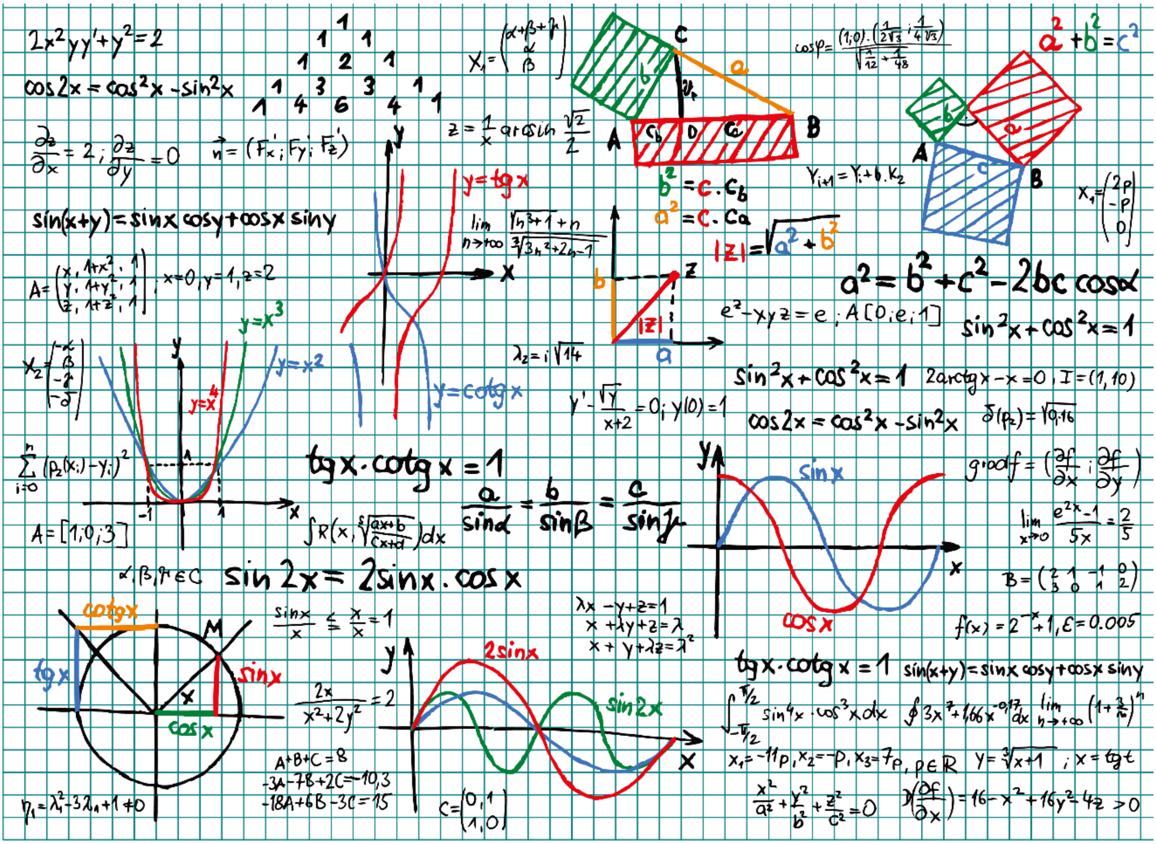
$\implies 12\mathrm{x} - \mathrm{y} = 16$

এখন $y = x^3$ আর $\mathrm{y} = 12\mathrm{x} - 16$ ফাংশন দুইটার গ্রাফ আকলেই দেখা যাবে (2,8)বিন্দুতে একটা সুন্দর স্পর্শক আকা হয়ে গেছে।



এভাবে যত কঠিন ফাংশনই হোক না কেন ক্যালকুলাস ব্যবহার করে তার যেকোনো বিন্দুতে স্পর্শক আকা যায়। তোমরা বাড়িতে বসে এই রকম কিছু মজার জিনিস চেষ্টা করতে পারো।

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরীকরণ



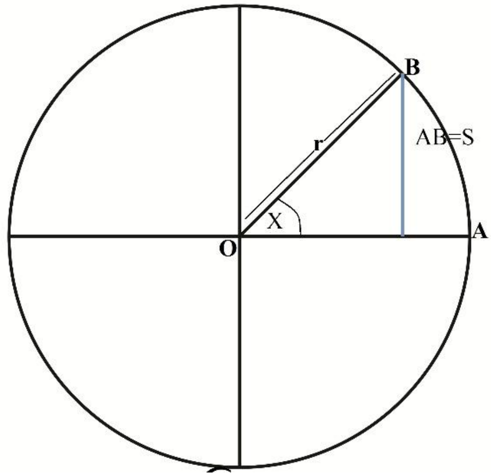
ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরীকরণ শেখার জন্য যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের দুই একটা সূত্র জানতে হয়। সেই কাজটা আগেই করে ফেলেছি মনে আছে তো $\sin(\alpha + \beta)$ এর সূত্রটা। ওটা এখানে কাজে লাগবে

আলোচনায় যাওয়ার আগে আমাদের একটা লিমিট শিখে আসতে হবে।তারও আগে জেনে নিতে হবে কোণের রেডিয়ান পরিমাপ সম্পর্কে।

তোমরা তো জানোই কোণ তৈরীর জন্য প্রয়োজন হয় আবর্তনের। যেকোনো একটা বিন্দুর সাপেক্ষে নির্দিষ্ট পরিমান দূরত্ব বজায় রেখে যদি একটা বিন্দু চলতে থাকে তাহলে সেই বিন্দুটা যে পথ অতিক্রম করে সেটা একটা বৃত্ত তৈরী করে। সেই সাথে ঐ নির্দিষ্ট দূরত্ব যদি একটা রেখা দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহলে রেখার আদি অবস্থান আর কিছুক্ষণ আবর্তনের পরের অবস্থানের মধ্যে একটা কোণ সৃষ্টি হয় রেখার শেষ প্রান্তটাও দূরে সরে যায় এই সরে যাওয়া অংশটা একটা বৃত্তের অংশ হবে জ্যামিতিতে এই জিনিসকে বলে বৃত্ত চাপ। একটা কোণ ঠিক কতোটা বড় তাও কিন্তু এই বৃত্তচাপ কতোটা বড় তার উপরেই নির্ভর করে। কোণ দ্বারা আবদ্ধ বৃত্তচাপ ছোট হলে কোণ ছোট হয় বড় হলে কোণ বড় হয়।

এখান থেকে একটা কথা বলে দেয়া যায়,বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ ওই চাপের দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক।

ধরে নিচ্ছি কোণের পরিমান X এই কোণ দ্বারা বৃত্তের উপর আবদ্ধ চাপ AB= S (চিত্রঃ১)



তাহলে,AB ∝ x

$\Longrightarrow s \propto x$

$\Longrightarrow s = kx$

$\Longrightarrow \frac{s}{x} = k$

এখানে k একটি ধ্রুবক এবং এই ধ্রুবকটা এমন কেউ হবে যে আমাদের গল্পের মধ্যেই আছে। দআমাদের এই গল্পে কোণ আর চাপ ছাড়া আরো একজন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের পরিমাপ ছিল বৃত্তের ব্যাসার্ধ। এখানে সেটাই ধ্রুবকের কাজ করবে একটু চিন্তা করলেই বুঝে যাবা আসলে ব্যাসার্ধ কতো কোণের জন্য চাপের দৈর্ঘ্য কতো হবে তা সিলেক্ট করে দেয়।

তো সাধারণত বৃত্তের ব্যাসার্ধকে r দিয়ে লেখা হয় এজন্য সমীকরণে k=r বসিয়ে লিখতে পারি,

$s = r\,x$

কোণ নিয়ে অনেক কথাই বলা হলো আরো একটু বলেই ফেলি,যখন একটা পূর্ন বৃত্ত তৈরী হয় কেন্দ্রে কোণ হয় 360 ডিগ্রি আর ঐ কোণ দ্বারা যে বৃত্ত চাপ তৈরী হওয়ার কথা ছিল সেটাকে আর চাপ বলা যায় না হয়ে যায় পরিধি।

ব্যাসার্ধ r হলে বৃত্তের পরিধি $2\pi r$

একটু আগে আমরা কোণকে চাপের দৈর্ঘ্য আর ব্যাসার্ধ্যের অনুপাত হিসেবে শিখেছিলাম সেটা ব্যবহার করে লিখতে পারি,

$$\frac{2\pi r}{r} = 360 \Longrightarrow 180 = 2\pi$$

এই মূহুর্তে কিন্তু আমরা কোণ পরিমাপের আরো একটা পদ্ধতি পেয়ে গেলাম সেটা হলো চাপের দৈর্ঘ্য দ্বারা কোণ পরিমাপ করা। কোণ পরিমাপের এই পদ্ধতিটা বৃত্তীয় পদ্ধতি নামে পরিচিত,এভাবে যখন কোণকে প্রকাশ করা হবে তার এককের নাম রেডিয়ান।

তাহলে, $180° = 2\pi\ rad$

এবার ছবির দিকে তাকাও ছবিতে <AOB=x বৃত্তের ব্যাসার্ধ OA=r কেন্দ্রে x কোণ দ্বারা আবদ্ধ চাপ AC= s

এই বৃত্ত থেকে লিখা যাবে, $s = rx \implies$

$x = \frac{s}{r}$

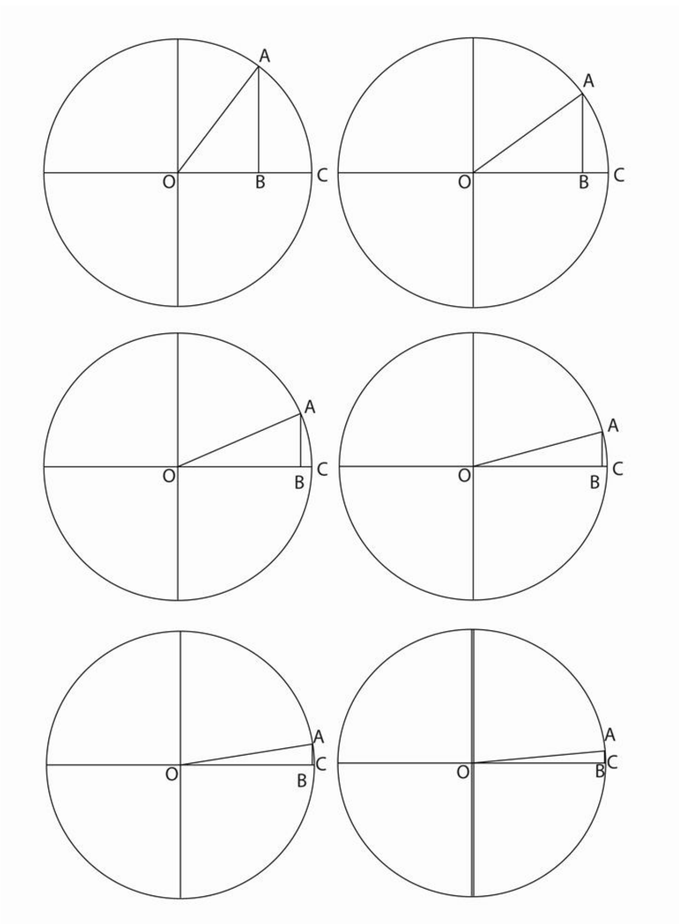
$\implies x = \frac{AC}{OA}$

আর $\Delta OAB \implies sinx = \frac{AB}{OA}$ ক্লিয়ার?

এবার পাচ্ছি, $\frac{sinx}{x} = \frac{AB}{OA} \div \frac{AC}{OA}$

$\implies \frac{sinx}{x} = \frac{AB}{AC}$

এবার দেখো আস্তে আস্তে যদি x কোণকে ছোট করতে থাকি তাহলে কি ঘটে। বুঝলে ঘটনা কিছু?



যদি x কোণ খুব ছোট হয়ে 0 এর কাছাকাছি চলে আসে তাহলে B আর C বিন্দু প্রায় মিলে যাবে তখন লিখা যাবে

$\lim x \longrightarrow 0 \; AB \longrightarrow AC$

যদি তাই হয় তাহলে দাঁড়াবে, $\lim x \longrightarrow 0 \; \frac{sinx}{x} = \frac{AB}{AB} = 1$

উভয়পাশে ব্যস্তকরন করে লিখা যাবে, $\lim x \longrightarrow 0 \; \frac{x}{sinx} = 1$

এই জিনিসটা আমাদের ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরীকরণের সময় দরকার হবে।

এবার আরো একটা জিনিস দেখানো যাক। এবারেও একই ছবির দিকে তাকাও,

$\Delta OAB \implies tanx = \frac{AB}{OB}, x = \frac{AC}{OA}$

এবার ছবিতে একটা ব্যাপার খেয়াল করো,যখন কোণ x ধীরে ধীরে ক্ষুদ্র হতে থাকে তখন B আর C বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব কমতে থাকে,এদিকে OA এর দৈর্ঘ্য কিন্তু ধ্রুবই থাকে

ফলে $\lim x \longrightarrow 0$ হলে $0B \longrightarrow OA$

আবার,একটু আগেই দেখিয়েছি

$\lim x \longrightarrow 0\ AB \longrightarrow AC$

এই জিনিসটা ক্লিয়ার? ক্লিয়ার না হলে ছবিটার দিকে ভালো করে তাকাও। ভাবো একটু

উপরের কথা গুলো বুঝে থাকলে,

$$\frac{tanx}{x} = \frac{AB}{OB} \times \frac{OA}{OC}$$

যদি $\lim x \longrightarrow 0$ হয় তাহলে $OB \longrightarrow OA$ আর $AB \longrightarrow AC$ এবার পাচ্ছি,

$$\lim x \longrightarrow 0 \frac{tanx}{x} = \frac{AC}{OA} \times \frac{OA}{AC} = 1$$

একই ভাবে এর বিপরীত কথাটিও সত্য অর্থাৎ, $\lim x \longrightarrow 0 \frac{x}{tanx} = 1$

এবার,তোমরা একটা লিমিট বের করে দেখাও দেখি,$\lim x \to 0\ \frac{(1-cosx)}{x} =?$

উপরে যে কয়টা ত্রিকোণমিতিক লিমিট শিখিয়েছি এগুলো অংক করার সময় ব্যবহার করতে হয়। আগের অধ্যায়ে বিশেষ বিশেষ রূপে থাকা ফাংশন গুলোর লিমিট মান বের করতে শিখিয়েছি ত্রিকোণমিতিক লিমিট গুলো এগুলোর সাথে মিশিয়ে দেয়া হয়। তোমাদের যা করতে হবে তা হলো এইযে ত্রিকোণমিতিক মৌলিক যে কয়টা লিমিট শেখালাম অংক যেভাবেই দেয়া থাক এই রূপে আনতে হবে সেজন্য ব্যবহার করতে হবে বিশেষ কিছু কৌশল যেগুলো আগের অধ্যায়ে জানিয়েছি। এখন আর বেশি ত্রিকোণমিতিক লিমিট উদাহরণ দিয়ে বোঝাতে যাচ্ছি না। সেটা রেখে দিলাম তোমাদের গবেষণা আর চিন্তার জন্য আর আগামী মেলায় যদি বই আসে তার জন্য।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহের অন্তরক

শুরুতেই একটা জিনিস জানিয়ে রাখি Cosecx এটাকে আজ-কাল cscx লেখা হয়। কারনটা হলো,সব ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে সংক্ষেপে তিন অক্ষরে লিখা হয় কোসেকের বেলায় কেন পাচ অক্ষরে তাই এটাকেও এখন তিন অক্ষরে cscx এভাবে লিখা হচ্ছে।

এখানে প্রতিক্ষেত্রে x হলো কোণ যার একক Radian এই ফাংশন গুলোর গ্রাফে x=1 মানে 1 radian

পিথাগোরাসের সূত্র থেকে আসা ত্রিকোণমিতির মৌলিক সূত্র গুলো মনে করিয়ে দেই,

$$(sinx)^2 + (cosx)^2 = 1$$

$$(secx)^2 = 1 + (tanx)^2$$

$$(cscx)^2 = 1 + (cotx)^2$$

আমাদের এবারের ফাংশন

$$y = sinx$$

ক্যালকুলাসের নিয়ম অনুসারে নিচের কাজ গুলো করে ফেলছি,

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - sinx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sinx.cosh + cosx.sinh - sinx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sinx(cosh - 1) + cosx.sinh}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sinx(cosh - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{cosx.sinh}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -\frac{(1 - cosh)}{h}.cosx + \lim_{h \to 0} \frac{sinh}{h}.cosx$$

$$= sinx.0 + cosx.1 = cosx$$

পরেরটা দেখে নাও আমি কোনো কথা বলবো না এখানে,

$$y = cosx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - cosx}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{cosx.cosh - sinx.sinh - cosx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{cosx(cosh - 1) - sinx.sinh}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{cosh - 1}{h}.cosx - \lim_{h\to 0} \frac{sinh}{h} sinx$$

$$= 0.cosx - sinx.1 = -sinx$$

Y=tanx এর অন্তরক অন্যভাবেও বের করা যায় সেটা তোমরা চেষ্টা করে দেখো,আমি যেহেতু আগের একটা পর্বে কষ্ট করে ভাগের সূত্র শিখিয়েছি তাই আমি ভাগের সূত্র দিয়েই কাজ করলামঃ

$$y = tanx = \frac{sinx}{cosx}$$

ভাগের সূত্রটা কিভাবে প্রয়োগ করতে হয় জানা থাকলে নিচের লাইন গুলো সহজেই বুঝতে পারবা আর নাহলে কিছু খেয়ে এসো,

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{sinx}{cosx}\right) = \frac{\frac{d}{dx} sinx.cosx - \frac{d}{dx} cosx.sinx}{(cosx)^2}$$

$$= \frac{cosx.cosx - (-sinx.sinx)}{(cosx)^2}$$

$$= \frac{(cosx)^2 + (sinx)^2}{(cosx)^2}$$

$$= \frac{1}{(cosx)^2}$$

$$= sec^2x = 1 + tan^2x$$

পরেরটাও প্রায় একই রকম,এটা না দেখে আগে নিজেরা চেষ্টা করো। খাতা কলম সাথে নিয়েছো আশা করি।

$$y = cotx = \frac{cosx}{sinx}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\frac{cosx}{sinx} = \frac{\frac{d}{dx}cosx.sinx - \frac{d}{dx}sinx.cosx}{(sinx)^2}$$

$$= \frac{(-sinx)sinx - (cosx)^2}{(sinx)^2}$$

$$= -\frac{(cosx)^2 + (sinx)^2}{(sinx)^2}$$

$$= -\frac{1}{(sinx)^2}$$

$$= -cosec^2x$$

$$= -csc^2x$$

$$= -(1 + cot^2x)$$

ভাগের সূত্র দিয়েই আবার কন্টিনিউ করছি পরেরটা,

$$y = secx = \frac{1}{cosx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{cosx}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}1.cosx - \frac{d}{dx}cosx.1}{(cosx)^2}$$

$$= \frac{-(-sinx)}{(cosx)^2}$$

$$= \frac{sinx}{cosx}\frac{1}{cosx}$$

$$= tanx.secx$$

$$= secx\sqrt{sec^2x - 1}$$

এবার ছয় নম্বর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত,

$$y = cscx = \frac{1}{sinx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{sinx}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}1.sinx - \frac{d}{dx}sinxx.1}{(sinx)^2}$$

$$= \frac{-cosx}{(sinx)^2}$$

$$= -\frac{cosx}{sinx}.\frac{1}{sinx}$$

$$= -cotx.cscx$$

$$= -cecx\sqrt{cec^2x - 1}$$

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরীকরণ(Differentiation of Inverse Trigonometric Function)

এবার পালা বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরক বের করার, তার আগে একটু ক্লিয়ার করি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন কি জিনিস?

ক্লাস নাইন-টেনে ফিজিক্সে প্রতিসরনাঙ্কের ম্যাথ গুলো করে থাকবা সেখানে প্রায়ই এমন চলে আসে $sinx = 0.442$ এই টাইপের জিনিস!!আমরা কিন্তু জানি না ঠিক সাইন কতো ডিগ্রির মান 0.442 ঠিক সেই সময় আমাদের সাহায্যের জন্য আসে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন । আমরা লিখি $\mathrm{x} = sin^{-1}(0.442)$ অর্থাৎ,বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের কাজ হলো কোণের মান বের করা ।সাধারনভাবে, যদি $\mathrm{y} = \mathrm{sinx}$ হয় তাহলে $x = sin^{-1}(y)$ এইটুকুই । বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে ভয় পাওয়ার তেমন কিছুই নেই এর সব বৈশিষ্ট্য অন্যান্য বিপরীত ফাংশনের মতোই।

এবার নিচের ত্রিকোণমিতিক ফাংশন গুলো নিয়ে কিভাবে অন্তরক বের করছি লক্ষ্য করো,

$$y = sin^{-1}x$$
$$\Longrightarrow x = siny$$

সমীকরণের উভয়পক্ষে y চলকের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করছি,সেটা উভয় পাশে d/dy অপারেটর দিয়ে প্রকাশ করে ফেললাম,

$$\Longrightarrow \frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}siny$$
$$\Longrightarrow \frac{dx}{dy} = cosy$$
$$\Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{1-(siny)^2}$$
$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-x^2}$$

কিছুদিন আগে শিখিয়েছিলাম $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ যখনই কোনো বিপরীত ফাংশনকে অন্তরীকরণের প্রয়োজন হবে এটা ব্যবহার করবো আজও করছি,

$$\Longrightarrow \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \sqrt{1-x^2}$$
$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

পরেরটা নিচে চেষ্টা করো আগে,

$$y = cos^{-1}x$$
$$\Longrightarrow x = cosy$$
$$\Longrightarrow \frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}cosy$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -siny$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\sqrt{1-(cosy)^2}$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\sqrt{1-x^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\sqrt{1-x^2}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

পরেরটা,

$$y = tan^{-1}x$$
$$\Rightarrow x = tany$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = 1 + tan^2y$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = 1 + x^2$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

আর মাত্র কয়েকটা ফাংশনের অন্তরক বের করা বাকি,

$$y = cot^{-1}x$$
$$\Rightarrow x = coty$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -(1 + cot^2y)$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -(1 + x^2)$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

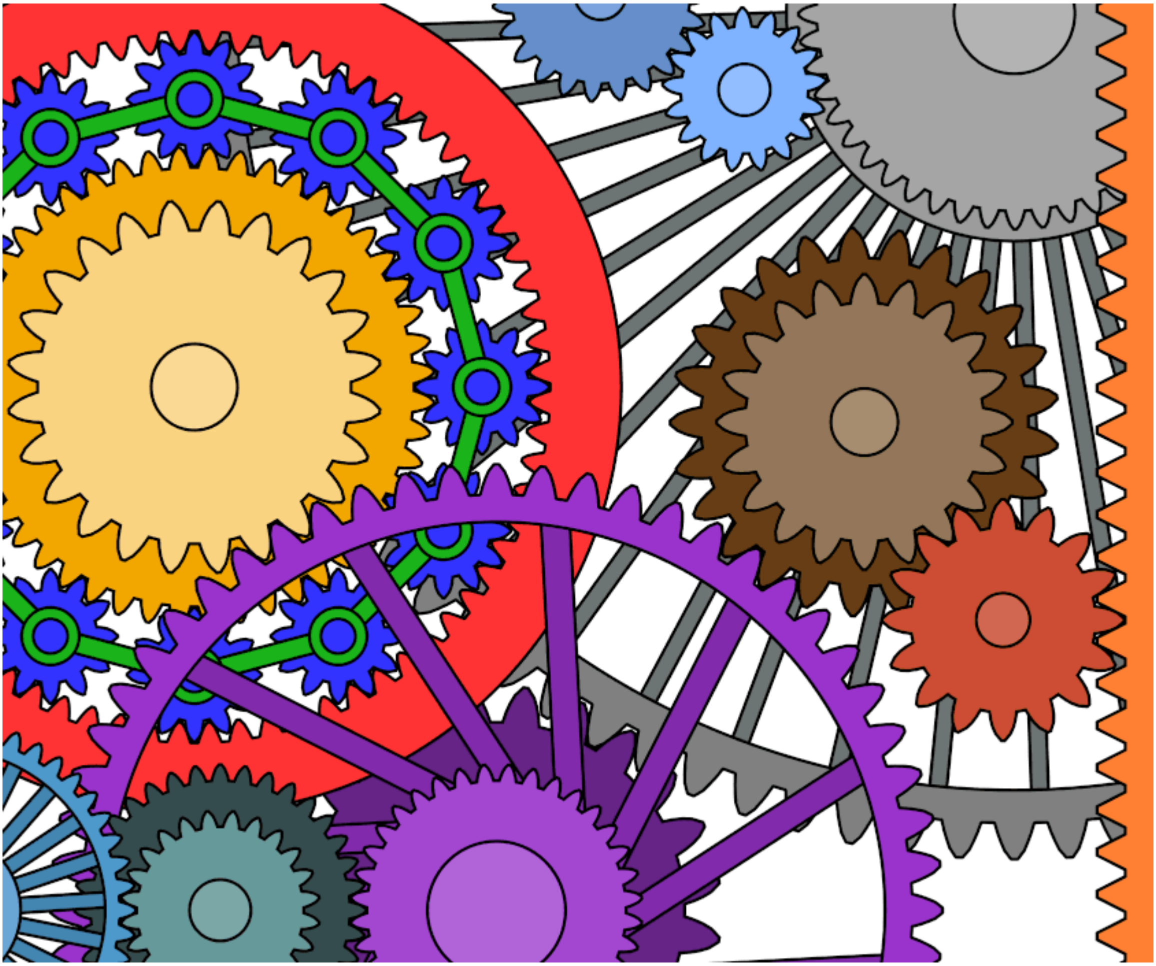
পরের ফাংশনটা $sec^{-1}x$

$$y = sec^{-1}x$$
$$\Rightarrow x = secy$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = tany.secy$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = secy\sqrt{sec^2y - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = x\sqrt{x^2 - 1}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$
শেষেরটা।

$y = cec^{-1}x$
$\Rightarrow x = cecy$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -coty.cecy$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -cecy\sqrt{cec^2y - 1}$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -x\sqrt{x^2 - 1}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

যৌগিক ফাংশনের অন্তরীকরণ(Differentiation of complex Function)



এর আগে যে ধরনের ফাংশনের অন্তরক নিয়ে আলোচনা করেছি সেগুলো বেশ সিম্পল ছিল। সাধারন একটা চলকের উপর ফাংশন নির্ভর করতো। চলকের পরিবর্তনে ফাংশনের পরিবর্তন হতো।

ব্যাপারটা একটু উদাহরণ দিয়ে বোঝানো যাকঃ

$f(x)=\sin(x)$

এতো দিনের শেখা বিদ্যা যদি কেউ গিলে থাকে,এটা x চলকের একটা ফাংশন x এর পরিবর্তনের জন্য ফাংশনটা কি হারে পরিবর্তিত হচ্ছে তা আমরা সহজেই বের করতে পারবে। কিন্তু কি হবে যদি চলক নিজেই একটা ফাংশন হয়। ব্যাপারটা কি বুঝতে পারছো।

ধরো এইরকম, $f(x)=\sin(g(x))$

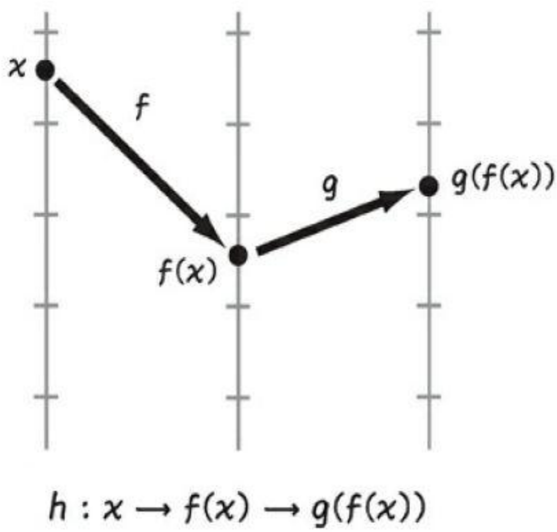
$g(x)=x^2$

মানে টোটাল ফাংশন $f(x)=\sin(x^2)$ এটাও কিন্তু x এরই একটা ফাংশন। কিন্তু এখানে যে ঘটনা ঘটছে সেটা কিন্তু মোটেও সোজা না অন্তত আগের থেকে একটু হলেও জটিল।

মনে করো ফাংশনটা একটা মেশিন এর ভেতরে সব কল-কব্জায় ভর্তি। sinx বের করার জন্য যে মেশিনটা ছিল ওটা বেশ সিম্পল। ওই মেশিনে x ঢুকিয়ে দিলে ভিতরে একটা চাকার মতো জিনিস আছে সেটা ঘুরতে থাকে সেই চাকাটা কতো কোণে ঘুরতে হবে সেই নির্দেশনা হলো x। x পরিমান ঘুরে চাকা থেমে যায় তারপর ঐ টুকু ঘোরার ফলে যে ত্রিভূজ পাওয়া যায় সেটার অতিভূজ মানে ঘূর্নন অক্ষ আর লম্বের দৈর্ঘ্য মেপে অনুপাত বের করে আউটপুট দেয়।

কিন্তু এইবার ব্যাপারটা একটু অন্যরকম দেখো প্রথমে মেশিনে x এর মান গুলো ঢুকছে তারপর সেটা দিয়ে চাকা ঘুরিয়ে সাইন এর মান বের করলেই চলবে না। কোণের পরিমানটাকে আবার বর্গও করতে হবে। এর মানে ওইযে চাকাটা আছে ওটাকে কতোটুকু ঘুরতে হবে সেই নির্দেশনা দেয়ার জন্য ভিতরে ক্যালকুলেটর টাইপের কিছু একটা চাই যেটা x এর মানকে বর্গ করে চাকাটার ঘোরার পরিমান নির্দেশ করবে। তারপর আমরা আউটপুট পাবো।

এই হলো একটা কম্পলেক্স ফাংশনের মেকানিজম। মানে এই ফাংশনের ইনপুটটা নিজেই একটা ফাংশন। এ ধরনের ফাংশনকে সহজ ভাষায় বলা হয় ফাংশনের ফাংশন বা ফাংশনের ভিতরে ফাংশন। এইটুকু ক্লিয়ার??



যৌগিক ফাংশনের গ্রাফ তৈরীর সময় আগে চলক ইনুপুট হিসেবে গ্রহন্ন করে তারপর সেই চলক মধ্যবর্তী ফাংশনে আবার ইনপুট হিসেবে ঢুকে সেখান থেকে যে আউটপুট বের হয় সেটা আবার আরেক ফাংশনে ঢুকে ছবিতে যৌগিক ফাংশনের গ্রাফ তৈরী হওয়ার প্রক্রিয়া দেখানো হয়েছে।

ধরে নাও একটা সিম্পল ফাংশন $\mathrm{f(x)} = \mathrm{sinx}$ খুব সহজ একটা ফাংশন যার চলক x এখানে আমরা x এর পরিবর্তে যা কিছু বসাতে পারি শুধু মাথায় রাখতে হবে $\mathrm{f(x)}$ যেন অসঙ্গায়িত না হয়ে যায়। এবার যদি চলকের জায়গায় x এরই একটা ফাংশন বসিয়ে দেই তাহলে তো কোনো সমস্যা নেই তাই না। ধরো আমাদের এই ফাংশনের চলক $\mathrm{g(x)} = x^2$

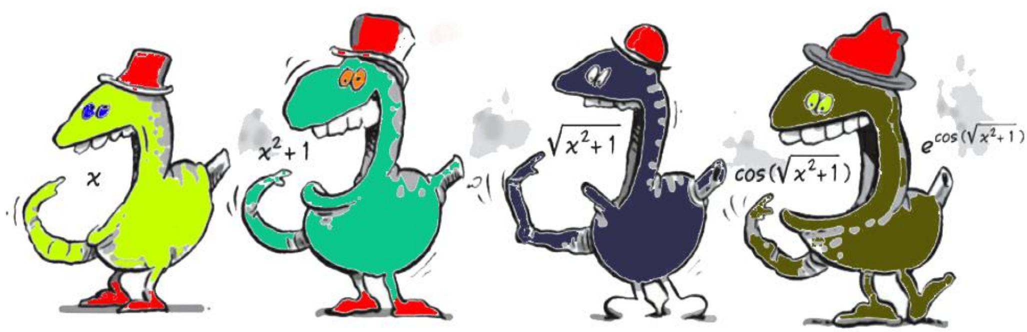
তাহলে পুরো ফাংশনটা দাড়াচ্ছে $f(g(x))$

$\mathrm{g(x)}$ কিন্তু x এরই ফাংশন তার মানে শেষ পর্যন্ত যেটা পাওয়া যাবে সেটা আর কিছুই না x এর একটা ফাংশন। একটু জটিল টাইপের

$$\sin(x^2)$$

এবার আমাদের লক্ষ্য x এর সাপেক্ষে এই জটিল ফাংশনের অন্তরক বের করা। আরেকটু সহজ ভাষায় ফাংশনের পরিবর্তন হার বের করা,আরো সহজ ভাষায় ফাংশনের গ্রাফ একে তার ঢাল বের করতে হবে। গাণিতীক প্রমাণের আগে একটু ভাবো কিভাবে এটা করা যেতে পারে।

আগে যেভাবে মেশিনের উদাহরন দিয়ে বুঝালাম,সেই অনুযায়ী ফাংশনটা দুই ধাপে কাজ করবে আগে ইনপুট নিবে x তার বর্গ করবে সেই মানকে আবার আরো একটা ফাংশনে ঢুকিয়ে তারপর চূড়ান্ত ফলাফল দিবে। সোজা বাংলায় দুই ধাপে কাজ আর কি!!



বুঝতেই পারছো ঢালটাও দুই ধাপে হিসাব করতে হবে। তাই না?? তো কি করা যায়?

এইভাবে ভেবে দেখো যেহেতু প্রথম ফাংশন $\mathrm{g(x)}$ যার ইনপুট x তাই প্রথমে x এর সাপেক্ষে এই ফাংশনের ঢালটা বের করে নেয়া যাক। পরের ধাপে $\mathrm{g(x)}$ ইনপুট দিয়ে যে ফলাফল পাওয়া যাবে মানে $\mathrm{f(g(x))}$ এই ফাংশনের ঢাল $\mathrm{g(x)}$ এর সাপেক্ষে বের করে নিলাম। এবার একটা জিনিস মাথায় রাখতে হবে সেটা হলো আমাদের প্রশ্নটা হচ্ছে x এর সাপেক্ষে চূড়ান্ত ফাংশন $\mathrm{f(g(x))}$ এর ঢাল কতো? একটু বুদ্ধি খাটালে বুঝবা মোট ঢাল হবে আসলে দুইধাপে বের করা ঢালের গুনফল!! আপাতত এটার জন্য আর তেমন যুক্তি দিতে ভালো লাগছে না এসো গাণিতীক ভাবে দেখানো যাক।

আমাদের f(g(x)) ফাংশনের অন্তরক x এর সাপেক্ষে বের করতে হবে

$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{(x+h)-x}$ ....(i)

$\frac{d}{dg(x)}f\big(g(x)\big) = \lim_{g(x)\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}$ ....(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $f\big(g(x+h)\big) - f\big(g(x)\big) = \frac{d}{dg(x)}f\big(g(x)\big)[g(x+h)-g(x)]$

$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big) = \frac{d}{dg(x)}f\big(g(x)\big).\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{(x+h)-x}\ \ \frac{d}{dx}f\big(g(x)\big)$$
$$= \frac{d}{dg(x)}f\big(g(x)\big).\frac{d}{dx}g(x)$$

এই সূত্রটা একটু হিজিবিজি লাগছে একটু সাজানো যাক,

ধরো, $g(x) = u\ f\big(g(x)\big) = v$ তাহলে দাড়াচ্ছে,

$\frac{d}{dx}v = \frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$

আশা করি ক্লিয়ার, এবার আমাদের প্রথমে ধরে নেয়া ফাংশনটার অন্তরক বের করে দেখা যাক।

ধরে নিচ্ছি,

$v = \sin(x^2)\,; u = x^2$

এবার লিখতে পারি, $v = \sin(u)$

এখন একটু আগে বের করা সূত্রটা প্রয়োগ করছি,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{du}\sin(u).\frac{d}{dx}u$$

$$\Longrightarrow \cos(u)\frac{d}{dx}x^2$$

$$= \cos(x^2).2x$$

এবার যদি ফাংশনটা আরেকটু জটিল হয় ধরো এইরকম f(g(h(x))) তাহলে এর অন্তরক কি হবে বলোতো? যদি আগের সূত্রটা বুঝে থাকো তাহলে এবার বের করতে পারবা জিনিসটা হবে ,

$$\frac{d\mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{h}(\mathrm{x})))}{dg(h(x))} \cdot \frac{dg(h(x)}{dh(x)} \cdot \frac{dh(x)}{dx}$$

এতোক্ষণ যে জিনিসটা আলোচনা করলাম সেটার একটা খুব বিখ্যাত নাম আছে চেইন রুল!! যদি চেইন রুল বুঝে থাকো,

এবার নিচের ফাংশন গুলোর অন্তরক বের করার চেষ্টা করোঃ

1.ln(1+x)$\ln(1+\mathrm{x})$

2. $\cos(x^3)$

3. $\sin(\ln(x+2))$

4.e^{4x}

5.$\sin(e^{3x})$

অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরীকরণ(Differentiation of Implicit Function)

এতোদিন যে ধরনের ফাংশন নিয়ে কাজ করছিলাম সেগুলো x আর y এর মধ্যে সহজ সরল একটা সম্পর্ক বর্ণনা করতো। বেশিরভাগ ক্ষেত্রে y ছিলো ফাংশন x ছিল চলক। x এর অল্প একটু পরিবর্তনে y এর পরিবর্তন হার বের করার গল্প বলে আসছি শুরু থেকেই। এতো দিন যে টাইপের ফাংশন গুলোর অন্তরীকরণ শেখানো হয়েছে সেগুলোর(প্রতিক্ষেত্রে y আলাদা আলাদা ফাংশন বর্ণনা করছে,ফাংশন গুলো পরস্পরের সাথে সম্পর্কিত না,সাধারণ ভাবে প্রত্যেকটা ফাংশনকে y দ্বারা বর্ণনা করা হয়েছে, প্রতিটি লাইন আলাদা এগুলোকে সম্পর্ক যুক্ত মনে করার কারন নেই) কিছু উদাহরণ দেয়া যাকঃ

$$y = 3x^3$$

$$y = 5x^2 + 2x + 7$$

$$y = x^{\frac{2}{3}}$$

$$y = sinx$$

$$y = \sin(x^3)$$

$$y = \cos(lnx)$$

$$y = \log_{sinx} cosx$$

এই ধরণের ফাংশন গুলো। আশাকরি,এতো দিন ক্যালকুলাস যেটুকু শেখানো হয়েছে তা যদি সম্পূর্ন ভাবে গিলে থাকতে পারো তাহলে উপরের ফাংশন গুলোর অন্তরক বের করা তোমাদের জন্য খুব একটা কঠিন হবে না। যারা উপরের ফাংশন গুলো দেখে ভয় পাও নি তাদের অভিনন্দন!! মাধ্যমিকের ছাত্ররা যদি এতোক্ষণ যা যা বুঝিয়েছি বুঝে থাকো তাহলে আবারো অভিনন্দন!! এই পর্যন্ত শিখে গণিত পদার্থবিজ্ঞানে অনেক দূর যাওয়া সম্ভব।

উপরের ফাংশন গুলো দেখেছো,এগুলোর কিছু কিছু বেশ জটিল হলেও এরা সম্পর্কের দিক দিয়ে কিন্তু একদম সরল। সব গুলো ফাংশন x আর y এর মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে। আমরা ফাংশন দেখেই বুঝতে পারে কেমন সম্পর্ক,কতোটা জটিল। কিন্তু যদি এমন হয় x আর y এর সম্পর্ক গুলোকে ঘুরিয়ে, পেচিয়ে লিখা হয়। ব্যাপারটা ধরো এই রকম

$x^2 + xy + y^2 = 5$ অথবা $\sin(x^3 + y^3) = 4xy$ দেখো এই ফাংশন গুলোতে কিন্তু x আর y এর সম্পর্ক সরল ভাবে বলে দেয়া হয় নি অর্থাৎ,yকে x বা x কে y এর মাধ্যমে প্রকাশ করে দেয়া হয় নি। কিন্তু যত যাই হোক এটাও তো গাণিতীক সম্পর্ক বা ফাংশন,কিন্তু বর্ণণা একটু বাজে টাইপের। এই ধরনের ফাংশন গুলোকে তাই নাম দেয়া হয়েছে অব্যক্ত ফাংশন। ইংরেজিতে বলে Implicit Function .

এখন কিন্তু এই ধরণের ফাংশনেরও অন্তরক চেয়ে বসতে পারে,কিন্তু জানোই তো অন্তরক বের করতে হলে ক্লিয়ার করতে হয় কার সাপেক্ষে অন্তরক বের করবো।কিন্তু এই ধরনের ফাংশনে সমস্যাটা সেখানেই। তাহলে কিভাবে কি করা যায়?

এক কাজ করলে হয় না হিসাব নিকাশ করে x বা y এর মান বের করে নিয়ে তারপর যে চলকের সাপেক্ষে অন্তরক বের করতে বলা হয় সে চলকের সাপেক্ষে অন্তরক বের করলেই তো হয়। চলো চেষ্টা করে দেখা যাক,

এই ফাংশনটার কথাই ধরো,

$$x^2 + xy = 1$$

$$\Rightarrow xy = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 - x^2}{x}$$

এবার x এর সাপেক্ষে অন্তরক বের করে নিলেই হলো,সেটা আর করে দেখাচ্ছি না। এই ফাংশনটা সোজা ছিলো তাই অব্যক্ত থেকে ব্যক্ত করতে খুব একটা বেগ পেতে হয় নি। কিন্তু নিচের ফাংশনটার দিকে একটু তাকাও এটা নিয়েও একই জিনিস চেষ্টা করো তো। মানে x এর সাপেক্ষে অন্তরক বের করো,

$$x^2 + xy + y^2 = 5$$

ধাপ-১ঃপ্রথমে y এর মান বের করো

ধাপ-২ঃএবার y কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে $\frac{dy}{dx}$ বের করো।

পেরেছো?

আমি খাতায় এই দুই ধাপ অনেক বার চেষ্টা করেছি কিন্তু ব্যর্থ!! ওদিকে তোমাদের কি অবস্থা? আমার মনে হয় না এত সহজে পারবে কাজটা। প্রথম ধাপের কাজটা করতে গেলে খুব সহজে পারা যায় না বরং আরো জটিল হয়ে যায় ব্যাপারটা। তাই আমি বলিকি এই ব্যাটা যেভাবে আছে সেভাবেই থাক আমরা বরং সরাসরি অন্তরীকরণ করে ফেলি।

তার আগে একটা থিওরেম মনে করিয়ে দেই যদি y , x চলকের ফাংশন হয় তাহলে x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরক dy/dx . একেবারে সহজ একটা অব্যক্ত ফাংশন দিয়ে কাজ শুরু করা যাক।

ধরো, xy=1 এই ফাংশনটাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করছি,

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x)y + x.\frac{d}{dx}(y) = 0$$

উপরে শুধু গুনের সূত্র প্রয়োগ করেছি আর কিছুই না,

$$\Rightarrow y + x.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

আশা করি ক্লিয়ার।

এবার একটু কঠিন ফাংশন নিয়ে কাজ করা যাক,

$x^2 + xy + y^2 = 5$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করছি,

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$\Rightarrow 2x + y + x.\frac{dy}{dx} + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x + 2y) = -(2x + y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

আরো একটু কঠিন ফাংশন যেমন, $sin(x + y) = xy$ এটা নিয়ে কাজ করা যাক

$$\frac{d}{dx}(sin(x + y)) = \frac{d}{dx}(xy)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x + y).cos(x + y) = y + x.\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{dy}{dx})\, cos(x + y) = y + x.\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow cos(x + y) + \frac{dy}{dx}.cos(x + y) = y + x.\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(cos(x + y) - x) = y - cos(x + y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - cos(x + y)}{cos(x + y) - x}$$

আর একটা দেখানো যাক,

$$ln(x+y) = 3y^3$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}(ln(x+y)) = \frac{d}{dx}(3y^3)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(x+y)}.(1+\frac{dy}{dx}) = 9y^2.\frac{dy}{dx}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x+y} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{x+y}\right) = 9y^2\frac{dy}{dx}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx}(\frac{1}{x+y} - 9y^2) = -\frac{1}{x+y}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{((x+y)(x+y) - 9y^2)}$$

পদার্থবিজ্ঞানের বিখ্যাত ভর-শক্তির সমীকরণ প্রমাণ করতে অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরীকরণ জানতে হয় তোমরা যদি প্রথম থেকে দেখে থাকো বুঝে থাকো তাহলে এখন ভর-শক্তির সমীকরণের প্রমাণটাও বুঝতে পারবা!!তাই এই পর্যন্ত পড়ে থাকলে আপেক্ষিকতা বুঝতে আর গাণিতীক বাধা নেই। কোয়ান্টাম মেকানিক্সেও বহুদূর যেতে পারবা।

যদি বুঝে থাকো নিচের অব্যক্ত ফাংশন গুলো থেকে dy/dx বের করতে চেষ্টা করো,

1. $x^3 - 3xy + y^3 = 1$

2. $x^2 + y^2 = sin(xy)$

3. $ln(xy) = x + y$

4. $y = sin((x+y)^2)$

লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ(Differentiation with logarithmic Function)

অন্তরীকরনে কিছু আজব আকৃতির ফাংশন আসতে পারে যাদের সাধারণ পদ্ধতিতে কাবু করা বেশ মুশকিল হয়ে যায়। এজন্য আজব আজব আকৃতির ফাংশনগুলোকে কাবু করার জন্য এই পদ্ধতিটা শেখা জরুরি।

এইবার এমন একটা ফাংশন দেয়া হল যেটা আসলে একটা ফাংশনের উপরে আরো একটা ফাংশন দিয়ে তৈরী

এতোদিন কোনো ফাংশনের অন্তরক বোঝাতে $\frac{df(x)}{dx}$ এই প্রতীক ব্যবহার করে এসেছি কিন্তু এই প্রতীকটা একটু বড়-সড়। অনেক জায়গায় লিখতে অসুবিধা হয়,হিজিবিজি হয়ে যায়। আর তাছাড়া আমরা অনেক দিন এই প্রতীক ব্যবহার করে আসছি এবার থেকে মাঝে মাঝে একটু অন্য প্রতীক ব্যবহার করবো। $f(x)$ এর অন্তরক বোঝাতে $f'(x)$ প্রতীকটা ব্যবহার করবো।

আবারো মনে করিয়ে দেই আমাদের উদ্দেশ্য হলো ফাংশনের অন্তরক বের করা অর্থাৎ, $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

$y = \ln(f(x))$ এই আকারের ফাংশন হলে নিয়ম অনুযায়ি অন্তরক হবে

$$y = \ln(f(x))$$
$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

বড় বড় অংক করার সময় এটা সরাসরি লিখতে হবে কিন্তু।

$y = f(x)^{g(x)}$ এই টাইপের একটা ফাংশন এতোদিন যে পদ্ধতি গুলো শিখিয়েছি সেগুলো এই ফাংশনের জন্য একটু কমই হয়ে যায়। যাইহোক এমন ফাংশনকে কাবু করার অস্ত্র হলো লগারিদম। ন্যাচরাল লগারিদমের ক্যালকুলাস অপেক্ষাকৃত সহজ হয়। এজন্য আমরা উভয়পক্ষে ন্যাচরাল লগারিদম নিয়ে নিচ্ছি। $\ln \mathrm{y} = \ln f(x)^{g(x)}$

$$\Longrightarrow lny = g(x)\ln(f(x))$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = g'(x)\ln(f(x)) + g(x) \times \frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[g'(x)\ln(f(x)) + g(x) \times \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$
$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln(f(x)) + g(x) \times \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

এবার এই আকারের একটা সহজ ফাংশন নিয়ে তার অন্তরক বের করে দেখানো যাক,

$$\mathrm{y} = \mathrm{x}^{\mathrm{x}}$$

$$\Longrightarrow lny = lnx^x$$

$$\Longrightarrow lny = xlnx$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = lnx + 1 \quad \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x^x(1 + lnx)$$

এই আকারের আরো দুই একটা উদাহরণ দেখানো যাক,

$$y = (\sin^{-1} x)^{lnx}$$

$$\Longrightarrow lny = ln(\sin^{-1} x)^{lnx}$$

$$\Longrightarrow lny = lnx.\ln(sin^{-1} x)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.\ln(\sin^{-1} x) + lnx.\frac{1}{\sin^{-1} x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{x}.\ln(\sin^{-1} x) + lnx.\frac{1}{\sin^{-1} x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin^{-1} x)^{lnx}[\frac{1}{x}.\ln(\sin^{-1} x) + lnx.\frac{1}{\sin^{-1} x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]$$

আর উদাহরণ দিচ্ছি না এই ফাংশন গুলো অনেক অনেক জটিল আমার জানা নেই কখনো বাস্তব অভিজ্ঞতায় অনেক উচ্চতর পর্যায়ের পড়াশোনায় এই ধরনের ফাংশনের দেখা পাওয়া যায় কিনা। তবে এগুলো জটিল তাই আমাদের অভীজ্ঞতা যাচাইয়ের জন্য অংক করতে দেয়া হয়। এই অংক গুলো একটু বেশি বড় হবে অনেক কৌশল প্রয়োগ করতে হবে। সব সময় মাথা ঠান্ডা রেখে এই জিনিস গুলো সমাধান করতে হয়। এই অংক গুলো আসলে সবচেয়ে সহজ অংক গুলোর মধ্যেই পরে শুধু চেহারা দেখে ভয় পেয়ে চুপসে গেলে হবে না। জটিল ফাংশনের অন্তরক বের করা বেশ সহজ!!

বার বার চেষ্টা করো এগুলো কোনো ব্যাপারই মনে হবে না। আমি মনে করি তুমি যদি নাইন টেনেও পরে থাকো এই টাইপের মাথ গুলো খুব একটা সাফার করাবে না যদি সবটুকু পড়ে থাকো।

লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ শেখার পর আমরা ইচ্ছে করলেই ক্যালকুলাসেরমূল সূত্র গুলো সহজেই প্রমাণ করে ফেলতে পারি। আমরা অনেক কাঠ খড় পুড়িয়ে প্রথম যে ফাংশনের অন্তরক বের করার সূত্র বের করেছিলাম সেটা $\mathrm{y} = \mathrm{x}^{\mathrm{n}}$

$$\Longrightarrow lny = lnx^n$$

$$\Longrightarrow lny = nlnx$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx}.\frac{1}{y} = n.\frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = ny.x^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^n.x^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

এভাবে ইচ্ছে করলে আরো দুই একটা মৌলিক সূত্রের প্রমাণ দেখাতে পারি। যেমন দুই ফাংশনের গুনফলের অন্তরক বের করার সূত্রটাঃ

$$y = f(x).g(x)$$

$$\Rightarrow lny = \ln\big(f(x).g(x)\big)$$

$$\Rightarrow lny = lnf(x) + lng(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x).g(x) + f(x)g'(x)$$

দুটি ফাংশনের ভাগফলের সূত্রটা তোমরা প্রমাণ করে ফেলো।

একই ভাবে সবগুলো মৌলিক সূত্র আমরা প্রমাণ করে ফেলতে পারি। কিন্তু দরকার কি? এখন তো তোমরা পারবেই। কাজেই আর দেখালাম না। এর আগে তো খুটে খুটে সব প্রমাণ শিখিয়েছি।

এবার আরো একটা গুরুত্বপূর্ন জিনিস শেখানো যাক। অনেক আগে থেকেই বলছি ক্যালকুলাস দিয়ে কোনো ফাংশনের পরিবর্তন হিসাব করা যায়। এরপর দেখিয়েছি ক্যালকুলাস জানলে যেকোনো আজব ধরণের বক্ররেখার উপর যেকোনো বিন্দুতে স্পর্শক আকা সম্ভব হলে তাও আকা যায়।

ধরো দুইটা পরিবর্তন পরস্পরের উপর নির্ভরশীল আমরা বলতে পারি এই দুইটা জিনিসের একটা পালটে গেলে অপরটাও পালটায়। এর একটা বাস্তব উদাহরণ হতে পারে এইরকম পৃথিবীর ব্যাসার্ধ আর পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরন (g) এর মান। আমরা জানি পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরনের মান পৃথিবীর ব্যাসার্ধের উপর নির্ভর করে। যদি ব্যাসার্ধ আরেকটু বেশি হতো তাহলে g এর মান একটু কমতো আবার ব্যাসার্ধ কম হলে g এর মান একটু বাড়তো কেন কমতো বা বাড়তো এটা জানো তো,বলেই দেই পৃথিবীর ব্যাসার্ধ যদি পরিবর্তন করা যেত তাহলে এর অভিকর্ষজ ত্বরনের মান ব্যাসার্ধের বর্গের সমানুপাতিক হতো । এখন হঠাৎ যদি কোনোভাবে পৃথিবী নামক কমলা লেবুটাকে (কমলা লেবু মজা করার জন্য বলছি এই হিসাবের সময় পৃথিবীকে মোটামুটি পারফেক্ট গোলক ধরে নেয়া হচ্ছে যার একটা নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ রয়েছে) চেপে একটু ছোট করে দেয়া যায় তাহলে পৃথিবী পৃষ্ঠে বসে তোমার

নিচের মাথাকে একটু ভারী মনে হবে!! আবার যদি পৃথিবীর কমলালেবুর মতো শেপের মধ্যে কোনোভাবে প্রচুর পরিমানে কোনো পদার্থ ঢুকিয়ে এর ব্যাসার্ধ বাড়িয়ে দেয়া যায় তাহলে মনে হবে সব কিছুই হালকা হালকা লাগছে। টেনশন,ডিপ্রেশন এসবের ভারও কিছুটা করে কমে যেতে পারে। যাহোক এবার গণিতে আসা যাক।

আমরা জানি, যদি পৃথিবী M ভরের R (পরিবর্তনশীল) ব্যাসার্ধের একটা গোলক হয় তাহলে এর পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরন g এর মান হবে

$g = \frac{GM}{R^2}$ G এখানে সার্বজনীন মহাকর্ষ ধ্রুবক

GM এর গুনফল একটা ধ্রুবক হবে কাজেই $GM = k$ ধরে নিতে পারি, তাহলে পৃথিবীর পরিবর্তনশীল ব্যাসার্ধ R আর তার পৃষ্ঠে পরিবর্তনশীল অভিকর্ষজ ত্বরন g এর একটা ফাংশন পাচ্ছি,

$$g = \frac{k}{R^2}$$

$$\Rightarrow lng = \ln\left(\frac{k}{R^2}\right)$$

$$\Rightarrow lng = lnk - lnR^2$$

$$\Rightarrow lng = lnk - 2lnR$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dR}.\frac{1}{g} = 0 - 2\frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{g} = -2\frac{dR}{R}$$

এখন একটা বিষয় খেয়াল করো,

$\frac{dg}{g}$ আর $\frac{dR}{R}$ দ্বারা আসলে কি বোজাচ্ছে?

এটা দ্বারা আসলে ক্যালকুলাসের আসল বিষয়টাই বোঝাচ্ছে।

এর আগে বুঝিয়েছিলাম $\frac{dy}{dx}$ এখানে dx দ্বারা বোজায় x এর ক্ষুদ্র পরিবর্তন এই পরিবর্তনের সাথে y এর পরিবর্তন সম্পর্কিত থাকে। x এর পরিবর্তন মানে বুঝো তো। x এর মান হয় বেড়েছে বা কমেছে তাও খুব ক্ষুদ্র পরিমানে তার প্রভাব পরেছে y এর উপর। আমরা এই প্রভাবটাই হিসাব করি।

যখন বলা হবে $\frac{dx}{x}$ তখন আসলে কি দাড়াচ্ছে?

তখন বোঝাচ্ছে x এর কতো অংশের পরিবর্তন হলো।

এখন আমরা উপরে একটা সমীকরণ পেয়েছি সেখানে এসেছে $\frac{dg}{g}$ এটা দ্বারা বুঝানো হচ্ছে অভিকর্ষজ ত্বরনের কতো অংশ পরিবর্তন হবে অর্থাৎ, বাড়বে না কমবে। যদি কমে যায় আমরা কমে যাওয়া অংশটা ঋণাত্বক চিহ্ন দিয়ে লিখি।

এবার এই সম্পর্ক থেকে আমরা কমা বাড়ার উত্তর দিতে পারবো। একটা প্রশ্ন দিয়ে ক্লিয়ার করা যাক।

*পৃথিবীর ভর অপরিবর্তিত রেখে ব্যাসার্ধ 2% হ্রাস করা হলে অভিকর্ষজ ত্বরন কতোটুকু হ্রাস বা বৃদ্ধি পাবে?

আমরা একটু আগেই ব্যাসার্ধ আর অভিকর্ষজ ত্বরনের মধ্যে কমা বাড়ার সম্পর্ক বের করেছি

$$\frac{dg}{g} = -2\frac{dR}{R}$$

এখানে বলে দেয়া আছে ব্যাসার্ধ 2% কমানো হচ্ছে, অর্থাৎ $\frac{dR}{R} = -2\%$

এবার খুব সহজেই লিখে দিতে পারি অভিকর্ষজ ত্বরনের পরিবর্তন, $\frac{dg}{g} = -2(-2\%) \Longrightarrow \frac{dg}{g} = 4\%$

অর্থাৎ, অভিকর্ষজ ত্বরন 4% বেড়ে যাবে।

এইভাবে এমন যেকোনো পরিবর্তনের জন্য হিসাব গুলো খুব সহজেই করা যায়। তোমরা ইচ্ছে করলে আরো অন্যান্য ক্ষেত্রে ক্যালকুলাস ব্যবহার করে পরিবর্তনের পরিমান হিসাব করতে পারো।

এই পরিবর্তনের হিসাব খুব গুরুত্বপূর্ন একটা বিষয়। এখান থেকেই আসবে ডিফারেন্সিয়াল ইকুয়েশন। পূর্নাঙ্গ বই আসলে তাতে এই নিয়ে আরো আলোচনা থাকবে।

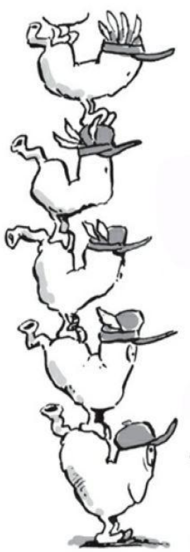
বার বার অন্তরীকরণ

আচ্ছা অন্তরকের কি অন্তরক থাকে?আর যদি থাকেই তাহলে সেটা কি হবে?

কোনো ফাংশনের অন্তরক ওই ফাংশনের যেকোনো বিন্দুতে আকা স্পর্শকের ঢালের একটা রাশিমালা নির্দেশ করে তাই তো,যদি প্রাপ্ত এই রাশি সাধারণত আবার একই চলকের একটা ফাংশন হয়।

যেমন ধরো সমত্বরনে কোনো একটা বস্তুর t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বের পরিমান

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$



দূরত্বটা সময়ের একটা ফাংশন। এই ফাংশন থেকে সময়ের সাপেক্ষে দূরত্বের পরিবর্তন হার বের করলে পাওয়া যাবে বেগ।

আমরা সেই ব্যাপারটাকে এইভাবে লিখি

$$\frac{ds}{dt} = u.\frac{dt}{dt} + \frac{1}{2}a.\frac{d}{dt}(t^2)$$
$$\Rightarrow v = u + \frac{1}{2}a.2.t$$
$$\Rightarrow v = u + at$$

সময়ের সাপেক্ষে দূরত্বের পরিবর্তন হার বের করলে পাওয়া যায় বেগ। এবং লক্ষ্য করো বেগ ও সময়ের একটা ফাংশন। আবার যদি সময়ের সাপেক্ষে বেগের পরিবর্তন হার বের করি তাহলে পাবো ত্বরন। জানো তো,সময়ের সাথে বেগের পরিবর্তন হার হলো ত্বরন।

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(u) + a.\frac{d}{dt}(t)$$
$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = a$$

এই পুরো ব্যাপারটাতে আমরা আসলে একটা ফাংশনের দুইবার অন্তরক বের করেছি। পরিবর্তন হারের পরিবর্তন হার যাকে বলে। আচ্ছা আরো একবার অন্তরক বের করা যাবে নাকি? উত্তর হলো না কারন শেষ পর্যন্ত একটা ত্বরন হিসেবে একটা ধ্রুবক পেয়েছি।

এইযে দুইবার অন্তরক বের করার প্রক্রিয়া এটাকে সরাসরি লিখলে কেমন হয় নিচের মতো

$$a = \frac{d}{dt}(v)$$
$$\Rightarrow a = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(s)\right)$$

সম্পূর্ন প্রক্রিয়াটাকে এভাবে লিখা যাবে।

এখন এই ব্যাপারটা আমরা প্রতীক ব্যবহার করে লিখে থাকি।

দেখো নিচে dt দুইবার আছে। dt কি জিনিস আগে জানিয়েছি। dt একটা খুব ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য।

আমরা যখন একটা দৈর্ঘ্য দুইবার গুন করি তখন সেটা কিভাবে উপস্থাপন করি জানো তো,একটু ক্লিয়ার করে দেই

একটা বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য AB আমরা লিখি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল$= AB \times AB = AB^2$

কখনোই কিন্তু A^2B^2 এইভাবে লিখা যাবে না। যদি A, B আলাদাভাবে সংখ্যা নির্দেশ করে কেবল তাহলেই $(\mathrm{A}.\mathrm{B})(\mathrm{A}.\mathrm{B}) = \mathrm{A}^2B^2$ এভাবে লিখা যায় ক্লিয়ার।

এজন্য দুইবার অন্তরীকরণ করলে নিচে $dt.dt = dt^2$ লিখা হয়। যদিও আসলে গুন হচ্ছে না তারপরেও এই ঘটনার এর থেকে ভালো ব্যাখ্যা পেলাম না। আবারো বলে দিচ্ছি এই ব্যাখ্যায় ইচ্ছে করলেই গানিতীক ভুল ধরা যাবে। তাই এই রকম ব্যাখ্যা না দিয়ে এটাকে একটা অপারেটরের আকার হিসেবে বলাই ভালো হবে।

দুইবার অন্তরীকরণ করলে উপরে পাওয়া যায় যেহেতু d দুইবার আছে তাই ২ কে উপরে লিখা হয় এভাবে d^2

উপরের দূরত্বের ফাংশনটিকে দুইবার অন্তরীকরণ করা হয়েছে বোঝাতে এভাবে লিখা হয়

$$\Rightarrow a = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(s)\right) \Rightarrow a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

এবার দুইবার অন্তরীকরণ করে আমাদের প্রাপ্ত a কে আবার অন্তরীকরণ করলে আর কিছু থাকবে না। কারন আমরা ইতিমধ্যে একটা ধ্রুবক পেয়ে গেছি।

$f(x)$	x^5	$\sin x$
$f'(x)$	$5x^4$	$\cos x$
$f''(x)$	$20x^3$	$-\sin x$
$f'''(x)$	$60x^2$	$-\cos x$
$f^{(4)}(x)$	$120x$	$\sin x$
$f^{(5)}(x)$	120	$\cos x$
$f^{(6)}(x)$	0	$-\sin x$
$f^{(7)}(x)$	0	$-\cos x$
...	...	...

এটা সুষম ত্বরনে চলমান বস্তুর জন্য দূরত্বের একটা ফাংশন ছিল এ কারনে মাত্র দুইবার অন্তরীকরণ করেই আমাদের থেমে যেতে হলো। কিন্তু যদি কোনো পর্যায়বৃত্ত গতি বা তরঙ্গের সমীকরণ হতো তাহলে ক্রমাগত অন্তরীকরণ করা সম্ভব হলো। বার বার পাওয়া যেত একই চলকের ফাংশন। কিছু কিছু ক্ষেত্রে অন্তরীকরন চলতে পারে অসীম সংখ্যক বার যেমন sinx, cosx, lnx এই ধরণের ফাংশন গুলো। তোমরা এদের ক্রমাগত অন্তরীকরণ করে দেখো এমন কিছু পাওয়া যাবে যাকে আবার অন্তরীকরণ করা যায় এভাবে চলতে থাকবে অসীম পর্যন্ত।

যাহোক একটু আগে দেখালাম একটা ফাংশনকে দুইবার অন্তরীকরণ করা হয়েছে বুঝাতে ব্যবহৃত প্রতীক

$\frac{d^2s}{dt^2}$ [এখানে s হলো t চলকের একটা ফাংশন]

তো যেকোনো ফাংশন $f(x)$ কে n সংখ্যকবার অন্তরীকরণ করা বোঝাতে এই

$\frac{\mathrm{d^n}}{dx^n}$ অপারেটর ব্যবহার করা হয়।

$\frac{\mathrm{d^n}}{dx^n}$ $f(x)$ বলতে বোঝায় $f(x)$ এর n তম অন্তরক।

ফাংশনের অন্তরক বোঝাতে আরো কিছু প্রতীক ব্যবহার করা হয় যেমনঃ

প্রথম অন্তরক $f'(x)$ অথবা, $\mathrm{f^i}(x)$

দ্বিতীয় অন্তরক $f''(x)$ অথবা, $f^{ii}(x)$

তৃতীয় অন্তরক $f'''(x)$ অথবা, $f^{iii}(x)$

এভাবে n তম অন্তরক বোঝাতে $\mathrm{f^n}(x)$ লিখলেও চলে।

তবে হ্যা অন্তরীকরন যোগ্যতা বলেও একটা ব্যাপার আছে কিন্তু সেটা মাথায় রাখতে হবে।

যেমনঃ

$$y = x^4$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^3$$
$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 4.3.x^2$$
$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = 4.3.2.x$$
$$\Rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = 4.3.2.1$$
$$\Rightarrow \frac{d^5y}{dx^5} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d^6y}{dx^6} = 0 \dots$$

উপরের ফাংশনটার ক্ষেত্রে 4 বার অন্তরীকরণ করার পর ধ্রুবক চলে এসেছে এরপর বাকি সব অন্তরক শূণ্য।

দেখো এই ধরনের ফাংশন যেগুলোর উপর সূচক হিসেবে ধ্রুবক থাকে তাদের কেবল ওই সূচকের মান যত সর্বোচ্চ তত বারই অন্তরীকরণ করা সম্ভব বাকি সব গুলো অন্তরক শূণ্য হবে।

$$y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$
$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$
$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3} \dots..$$

$$\Longrightarrow \frac{d^r y}{dx^r} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)x^{n-r}$$
$$\Longrightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1 = n!$$
এরপর যদি n+1 তম বা তারও উচ্চক্রমের অন্তরক বের করতে বলা হয় তাহলে হবে 0। ক্লিয়ার তো?

যাইহোক বিভিন্ন ফাংশনের n তম অন্তরক বের করা নিয়ে অনেক আলোচনা আছে আপাতত এই ফ্রি বইতে সেই আলোচনা আর সামনে যাবে না। সম্পূর্ন আলোচনা পেতে হলে পূর্নাঙ্গ বইয়ের জন্য অপেক্ষা করতে হবে।

অধ্যায়-৬

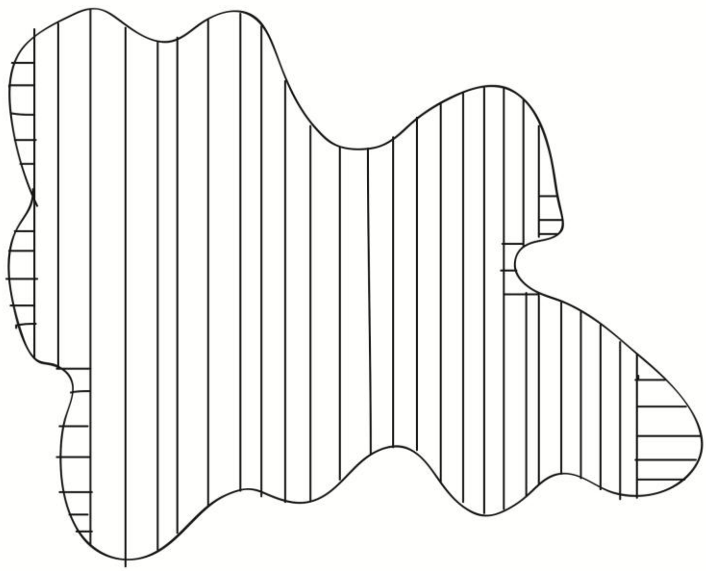
যোগজীকরণ

এতোদিন অন্তরীকরণ বা স্পর্শক বের করা নিয়ে কথা বলেছি। তবে শেষ হয়নি কথা। কথা জমে আছে আরো অনেক। এ পর্যন্ত শুধুই স্পর্শকের ঢাল বের করতে শিখিয়েছি ঢাল বের করার কাজটাকে বেশ কঠিন পর্যায়ে নিয়ে গেছিলাম। বাকি আছে অনেক কিছুই অন্তরকের অন্তরক,পরামিতিক ফাংশনের অন্তরক,টেলর আর ম্যাকলরিনের ধারা,ফাংশনের ম্যাক্সিমা-মিনিমা বের করা,মর্ধবর্তী মান বের করা আরো অনেক কিছু আছে।সবার আগ্রহ থাকলে এই জিনিসগুলো নিয়ে এই সিরিজেই আবারো লিখা হবে।তবে,এখন আমার উদ্দেশ্য হলো মাধ্যমিকের ছাত্রদের ক্যালকুলাস শেখানো ইতিমধ্যে অন্তরীকরণের যেটুকু আলোচনা করেছি তার সাথে চিন্তা শক্তি যোগ করে বিজ্ঞান জগতে বেশ ভালোই হাটা যাবে। এখন একটু যোগজীকরণ শেখানো দরকার।

মনে আছে আগে অতিক্রান্ত দূরত্ব থেকে বেগ বের করতে শিখেছি। এবার তার উল্টো কাজটা করলে কেমন হয়?? বেগ থেকে অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করার পদ্ধতিটা শিখে ফেলা যাক।

আমার প্রথম ক্যালকুলাস শেখা

আমি যখন ক্লাস টেনে তখন স্পেশাল রিলেটিভিটি বেশ ভালো লাগতো। ইন্টারমিডিয়েটের বই খুলে সূত্রগুলো দেখতাম আপেক্ষিকতার চার সূত্র সময় প্রসারন,দৈর্ঘ্য সংকোচন,ভরের আপেক্ষিকতা আর সবচেয়ে সুন্দর ভর-শক্তি সমতূল্যতার সূত্র ওই সময় কিছুই বুঝতাম না। এক বড় ভাইয়ের কাছে ভর-শক্তির সূত্রের প্রমাণ শিখতে চেয়েছিলাম। উনি প্রথম বলেছিলেন এটা ক্যালকুলাস ছাড়া বের করা সম্ভব না। আমি অবাক বলে কি ক্যালকুলাস,সে আবার কি জিনিস। সত্যি বলতে আমার তখনো ক্যালকুলাসের নাম শোনা হয় নি ভালো করে। তো ওই বড় ভাইকে আর প্রশ্ন করি নি এটা নিয়ে। আসল কথা হচ্ছে ভয়ে থাকতাম,ভাইয়া পড়াতে আসতেন আমাকে তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য মুখস্ত করতে দিয়ে গেছেন আগের দিন,অথচ আমি পারি নি। এর উপর আবার ক্যালকুলাস শিখতে চাই কিভাবে। স্কুলে গণিতের স্যারকে আমার বেশ ভাল লাগতো উনি গণিতের চমৎকার সব গল্প বলতেন ফের্মার শেষ উপপাদ্যের কথা ওনার মুখেই শুনেছিলাম,যেটা প্রমাণ করতে পারলে নাকি অনেক টাকা!! স্যার পিওর অ্যান্ড অ্যাপ্লাইড ম্যাথ থেকে অনার্স করা মানুষ,ওনাকেই একটু বললাম,স্যার ক্যালকুলাস জিনিসটা কি একটু বোঝাবেন? ওনার উত্তর ছিলো, “ক্যালকুলাস শেখার সময় এখনো হয় নি। এর জন্য আগে থেকে অনেক কিছু জানতে হয়।” এরপরেও আমি বলেছিলাম একটা প্রাথমিক ধারণা তো দিবেন। যাই হোক শেষ পর্যন্ত উনি মার্কারটা দিয়ে হোয়াইট বোর্ডে যেতে বললেন। এবার বললেন “একটা বক্ররেখা আকো,বক্ররেখার দুইপ্রান্ত যোগ করে দাও।” আমি একটা উদ্ভট টাইপের শেপ আকলাম। এবার বললেন, “এর ক্ষেত্রফল কতো?” আমি বললাম এই জিনিসের ক্ষেত্রফল কিভাবে বের করবো। এদিকে একটা উদ্ভট ছবি একে বসে আছি,ক্লাসের অনেকেই হাসছে,কেউ কেউ ওই শেপের নাম ও দিচ্ছে আরে এটা তো দেখছে এই রকম ব্লাহ-ব্লাহ। এবার স্যার বললেন এটাকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করে দাও। আমি জিনিসটা আরো কিছু ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র শেপে ভাগ করে দিলাম। ট্রাপিজিয়াম,ত্রিভুজ,ছোট বৃত্ত এই রকম কিছু শেপে আসলে কেমন ছবি একেছিলাম তার একটা নমুনাও দিলাম ছবিতে। এবার স্যার বললেন, “এই বড় শেপটার মোট ক্ষেত্রফল এই ছোট শেপ গুলোর ক্ষেত্রফলের যোগফলের সমান(সিম্পল কথা)।ছোট শেপ গুলো মোটামুটি আমাদের চেনা এদের পরিমাপ করতে পারলে ক্ষেত্রফল বের করা সম্ভব বেশ সহজেই। তারপর সব গুলো ক্ষেত্রফল যোগ করে দিলেই ওই উদ্ভট শেপের মোট ক্ষেত্রফল বের করা যাবে। এই রকম অদ্ভুত শেপের জিনিসের ক্ষেত্রফল,আয়তন বের করাই ক্যালকুলাসের কাজ,একে বলে যোগজীকরণ। এটা পরে শিখবা।”



আমার আকা অদ্ভুদ সেই আকৃতি

অনেক গুলো ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করে,ক্ষুদ্র অংশ গুলোর ক্ষেত্রফল যোগ করে দেয়া হয় বলে এর নাম যোগজীকরণ এইটুকু বুঝেছিলাম। যাই হোক আমি আমার বেঞ্চে ফিরে আসলাম।

এবার আমি আমার মতো করে গল্প শোনাই,

বেগ থেকে অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করা

আগের বার মনে আছে তো কিভাবে একটা গাড়ির অতিক্রান্ত দূরত্বের মান থেকে বেগ বের করেছিলাম?এবার বেগ থেকে বের করবো অতিক্রান্ত দূরত্ব। আবারো বলছি মহাবিশ্ব গাণিতীক ভাষায় লিখা,গণিতের ছবি হলো গ্রাফ।

মনে করো,নিচের টেবিলে একটা গাড়ির নির্দিষ্ট সময়ে(সেকেন্ড) কতো বেগে(মিটার/সেকেন্ড) চলছে সেই মান গুলো দেয়া আছে।

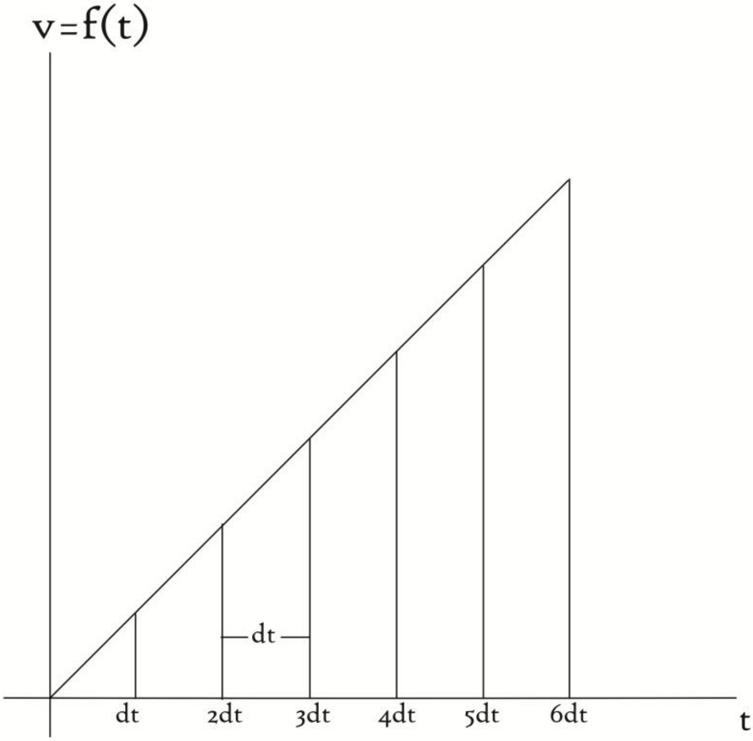
সময়(t)	0	1	2	3	4	5	6
বেগ(v)	0	1	2	3	4	5	6

একটা বিষয় খেয়াল করো সময় আর বেগের সাংখ্যিক মান এখানে সমান। এটা করেছি ব্যাপারটাকে একটু সহজ করার জন্য।

মানে আমরা লিখে দিতে পারি,t সময়ে বেগ $v=t$

এখন আমাদের উদ্দেশ্য এই টেবিলটা থেকে অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করা। এজন্য প্রথমেই একটা গ্রাফ একে নিচ্ছি।

সব মিলিয়ে ৬ সেকেন্ড সময়ে বেগের মান মানগুলো নিয়ে একটা গ্রাফ একেছি।



সময়ের অক্ষে প্রতি এক সেকেন্ডের নাম দিলাম dt .মোট সময় t=6s হলে dt হবে t এর 6 ভাগের 1 ভাগ ক্লিয়ার??

তাহলে,t=6dt

$$\Longrightarrow dt = \frac{t}{6}$$

আমরা আগে থেকেই জানি t সময়ে দূরত্ব s=vt

বুঝতে পারছো এখানে কিন্তু বেগ প্রতি মূহুর্তেই পরিবর্তিত হচ্ছে যেমনঃ

1s পরে বেগ 1 m/s

1.1s পরে বেগ 1.1 m/s

2s পরে বেগ 2 m/s

2.5s পরে বেগ 2.5 m/s

এর অর্থ বস্তু সমত্বরণে চলমান

মনে আছে একটা বস্তু যদি সমত্বরণে চলমান থাকে তাহলে, নির্দিষ্ট সময়ের শুরুতে আর শেষে বেগের যে মান থাকে তার গড় মান নিয়ে যদি ওইটুকু সময় চলমান থাকতো একই সমান দূরত্ব অতিক্রম করতো।

অর্থাৎ,যদি বের করতে চাই 1s-2s এই সময় ব্যবধানে বস্তুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করেছে?

তাহলে আমরা এভাবে হিসাব করলেই পেয়ে যাবো,

1s এ বেগ 1m/s

2s পর বেগ 2 m/s

এই এক সেকেন্ড সময়ে গড় বেগ= $\frac{1+2}{2}\ m/s\ =\ 1.5\ m/s$
তাহলে এই ১ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব = 1.5 m
এখন চলো দেখে আসি গ্রাফ কি বলছে? আমরা যেভাবে অতিক্রান্ত দুরত্ব বের করছি গ্রাফে তার মানে কি দাড়াচ্ছে?
গ্রাফ অনুযায়ী, 1 s সময়ে dt সময়ে যে বেগ হবে তার মান হচ্ছে v অক্ষে f(t) এর দৈর্ঘ্য এক্ষেত্রে, dt
2 s বা 2dt সময়ে যে বেগ হবে তার মানও v অক্ষের দৈর্ঘ্য এক্ষেত্রে 2dt
আর এই সময় ব্যবধানে অতিক্রান্ত দূরত্ব হচ্ছে, উপরিউক্ত দুই দূরত্বের গড় আর তার সাথে মধ্যবর্তী দূরত্বের গুনফল।

একটু চেনা চেনা লাগছে না, ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল = $\frac{\text{সমান্তরাল বাহু দ্বয়ের সমষ্টি}}{২}$ × বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব
এখানেও তো তাই করলাম। আসলে ক্ষেত্রফল বের করলাম। অর্থাৎ, নির্দিষ্ট সময়ে বেগের লেখচিত্র যেটুকু জায়গা আবদ্ধ করে সেই অংশের ক্ষেত্রফল ওই সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বের সমান হয়। এবার এই সম্পূর্ন সময়ের জন্য বেগের লেখচিত্র যেটুকু জায়গা আবদ্ধ করবে সেটাই হবে অতিক্রান্ত দূরত্ব।
গ্রাফটা দেখো অনেক গুলো ট্রাপিজিয়ামে বিভক্ত হয়ে গেছে এই ট্রাপিজিয়াম গুলোর ক্ষেত্রফলের যোগ ফল হবে অতিক্রান্ত দূরত্বের মান। চলো সেই কাজটাই করে ফেলা যাক
যেহেতু এখন গ্রাফ নিয়ে কাজ করছি তাই অতিক্রান্ত দূরত্ব না বলে ক্ষেত্রফল বলছি,
আমরা সময় অক্ষটিকে কয়েকটি ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করেছি এই ক্ষুদ্র প্রতিটি অংশের দূরত্ব সমান। বেগ অক্ষ বরাবর দৈর্ঘ্য গুলো সময় অক্ষে নির্দিষ্ট সময়ের বেগ নির্দেশ করে। গ্রাফটা দেখো কিছু সংখ্যক ট্রাপিজিয়ামে বিভক্ত হয়েছে। গ্রাফের ভূমির ক্ষুদ্র অংশ গুলো দ্বারা আবদ্ধ ট্রাপিজিয়ামগুলোর ক্ষেত্রফল বের করা যাক
প্রতিক্ষেত্রে ট্রাপিজিয়ামের সূত্র ব্যবহার করছি, ক্ষেত্রফল= ½ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি)*মধ্যবর্তী দূরত্ব

0-dt অংশ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}(0+dt)dt$

dt-2dt অংশ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}(dt+2dt)dt$

2dt-3dt অংশ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}(2dt+3dt)dt$

…………….

…………….

5dt-6dt অংশ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}(5dt+6dt)dt$

এবার সবগুলো ক্ষেত্রফল যোগ করে দিলেই এই টুকু সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব পেয়ে যাবো,ধরি ক্ষেত্রফল A

তাহলে A= $\frac{1}{2}(0+dt)dt+\frac{1}{2}(dt+2dt)dt+\frac{1}{2}(2dt+3dt)dt+\cdots\frac{1}{2}(5dt+6dt)dt$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}dt[(0+dt)+(dt+2dt)+(2dt+3dt)+\cdots+(5dt+6dt)]$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}dt.dt[1+3+5+\cdots+11]$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}(dt)^2(1+3+5+\cdots+11)$$

ক্ষেত্রফলের মানের ভিতরে একটা মজার জিনিস এসে গেছে ,1+3+5+⋯+11 মানে প্রথম 6 টা বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি ।প্রথম n সংখ্যক বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি হলো, n^2 এটা তো জানোই

অর্থাৎ, $1+2+3+\cdots+11=6^2$

dt কি জিনিস আবার একবার মনে করিয়ে দেই, dt হলো সময় অক্ষের ক্ষুদ্র অংশ এক্ষেত্রে $dt=\frac{t}{6}$
এবার ক্ষেত্রফলের মানে dt এর মান বসিয়ে দিয়ে পাই,

$$A = \frac{1}{2} \times 36 \times (\frac{t}{6})^2 \implies A = \frac{t^2}{2}$$

এই হচ্ছে ক্ষেত্রফলের মান একই সাথে বেগ জানার মাধ্যমে অতিক্রান্ত দূরত্বের মান।

কিন্তু একটা জিনিস লক্ষ্য করেছো আমরা যে জিনিস খুজছিলাম সেটা কিন্তু পাইনি। আমরা খুজতে এসেছিলাম 0-6 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব কিন্তু পেয়েছি যেকোনো সময় t তে অতিক্রান্ত দূরত্ব কতো হবে সেই মান!!

এটা হয়েছে কারন আমি শুরুতেই বলে দিয়েছিলাম একটা সহজ মান ধরে নিয়ে কাজ করবো। এই ক্ষেত্রে বেগ আর সময়ের সম্পর্কটা খুব সহজ সরল ছিল তাই এমন হলো। যদি এই সম্পর্কটা আর একটু কঠিন হতো তাহলে কিন্তু এতো সহজেই ক্ষেত্রফল বের করা যেত না,হিসাব হতো আরো বড়। যাহোক আপাতত যে অতিক্রান্ত দূরত্বের জন্য যে রাশি পেয়েছি তাতে যদি t=6 বসিয়ে দেই উদ্দেশ্য সাধন!!

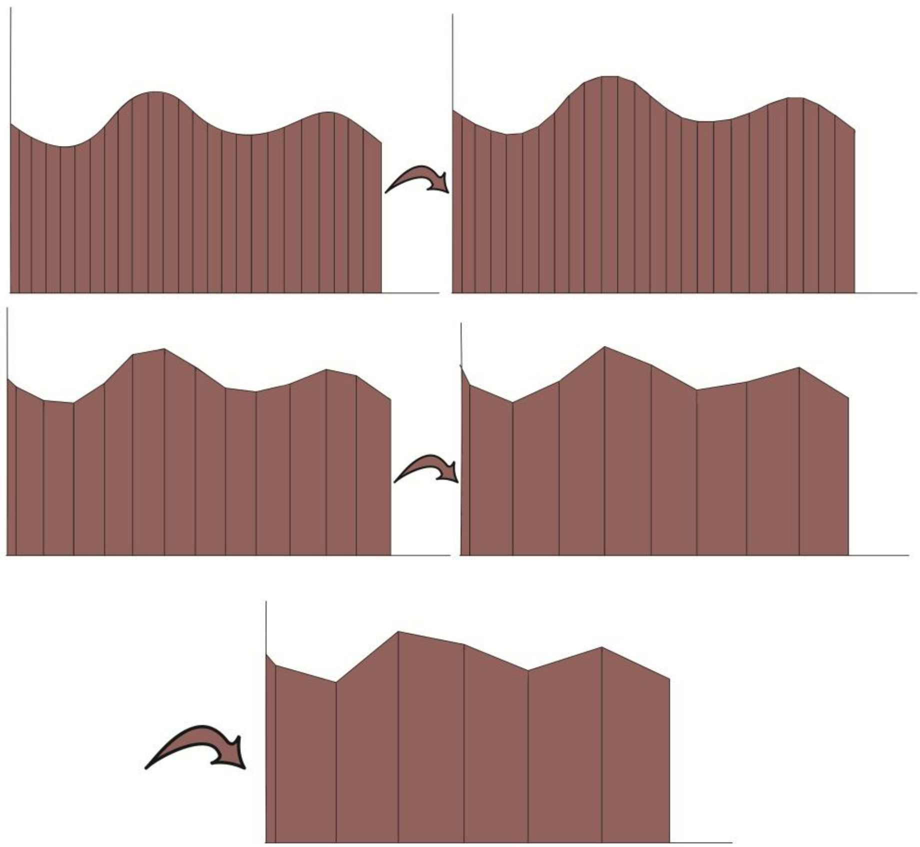
এবার দেখি ব্যাপারটাকে একটু কঠিন করা যাক

অদ্ভুত আকারের ক্ষেত্রফল

এবার সময়-বেগ লেখচিত্র অতোটা সহজ-সরল না আকা-বাকা,উচু-নিচু। কিন্তু এবারেও একই নিয়ম বেগের লেখচিত্র অক্ষের সাথে যেটুকু জায়গা আবদ্ধ করবে তার ক্ষেত্রফল হবে অতিক্রান্ত দূরত্বের মান।

ছবিতে দেখো এবারেও একই ভাবে গ্রাফটাকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করে ক্ষেত্রফল বের করার চেষ্টা করছি।

প্রথমবার পুরো গ্রাফটাকে সমান-সমান অনেক গুলো ভাগে ভাগ করে দিলাম। সেগুলোকে যোগ করে ট্রাপিজিয়াম আকলাম,গ্রাফটা মোটামুটি আগের মতোই দেখাচ্ছে।ক্ষেত্রফল বের করলে মোটামুটি সঠিক মান পাওয়া যাবে একদম সঠিক না। কিন্তু এবারে ভাগ সংখ্যা কিছুটা কমিয়ে দিলাম এবারে ছবিটা একটু পালটে গেল। এই ছবি থেকে ক্ষেত্রফল বের করলে ক্ষেত্রফলের মানের সঠিকতা আগের থেকেও কমে যাবে।



পরের ছবি গুলোতে দেখো গ্রাফটা মোটামুটি বড় বড় মাত্র কয়েকটা অংশে ভাগ করে ক্ষেত্রফল বের করার চেষ্টা করা হচ্ছে।গ্রাফের খন্ড গুলো যতোই বড় হচ্ছে গ্রাফের আকার তত বিকৃত হচ্ছে।এভাবে চলতে থাকলে,এক সময় গ্রাফটাকে চেনাই যাবে না।ক্ষেত্রফলের মান আর প্রকৃত মান আকাশ-পাতাল পার্থক্য হয়ে যাবে।

এতোক্ষণ এই কথা গুলো বলার উদ্দেশ্য একটাই সেটা হলো একটা জটিল গ্রাফকে ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করে গ্রাফের আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের করার সময় গ্রাফকে যত বেশি সংখ্যক ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করা হবে ক্ষেত্রফলের মান ততই আসল মানের কাছাকাছি হবে। কি করলে একদম সঠিক মানটা পাওয়া যাবে?

আচ্ছা যদি গ্রাফটাকে অসীম সংখ্যক ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করে দেই,তাহলে? হ্যা ক্ষেত্রফলের সবচেয়ে সঠিক মান পাওয়া যাবে!!

একটু আগে বেগ বের করা সময় দেখালাম গ্রাফ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফলকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফলের একটা ধারা হিসেবে প্রকাশ করতে পারছি। আগের বার গ্রাফের ভূমিকে সমান 6 অংশে ভাগ করেছিলাম। ধারায় ৬ টা পদ ছিল। এবার বলেছি যদি জটিল গ্রাফ হয় তাহলে অসীম সংখ্যক ভাগে ভাগ করতে হবে,পাওয়া যাবে অসীম সংখ্যক পদের একটা ধারা,যার সমষ্টি আবার গ্রাফ দ্বারা আবদ্ধ মোট ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে,বেগ থেকে অতিক্রান্ত দূরত্বের মান বের করে।

আগের বার গ্রাফের t অক্ষকে 6 ভাগ করেছিলাম প্রতিটা সমান ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য ছিল $\frac{t}{6}$

যদি t অক্ষকে n সংখ্যক ভাগে ভাগ করি তাহলে প্রতিক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য হবে $\frac{t}{n}$

সবচেয়ে সঠিক ক্ষেত্রফল বের করার জন্য অসীম সংখ্যক ভাগ করার কথা বলেছিলাম

অর্থাৎ, limit $n\longrightarrow \infty$ এর জন্য $dt=\frac{t}{n}$ এর মান $dt\longrightarrow 0$

dt হলো একদম ক্ষুদ্রতর,যতো ক্ষুদ্রতর হওয়া সম্ভব ক্ষুদ্রতর হতে হতে 0 এর যত সম্ভব নিকটে পৌছায়,পৌছাতেই থাকে।

আর এদিকে ক্ষেত্রফলের মান তো ধারার সমষ্টি সেই ধারার পদ সংখ্যা অসীমের দিকে পৌছাচ্ছে কেউ শেষ খুজে পাচ্ছে না।

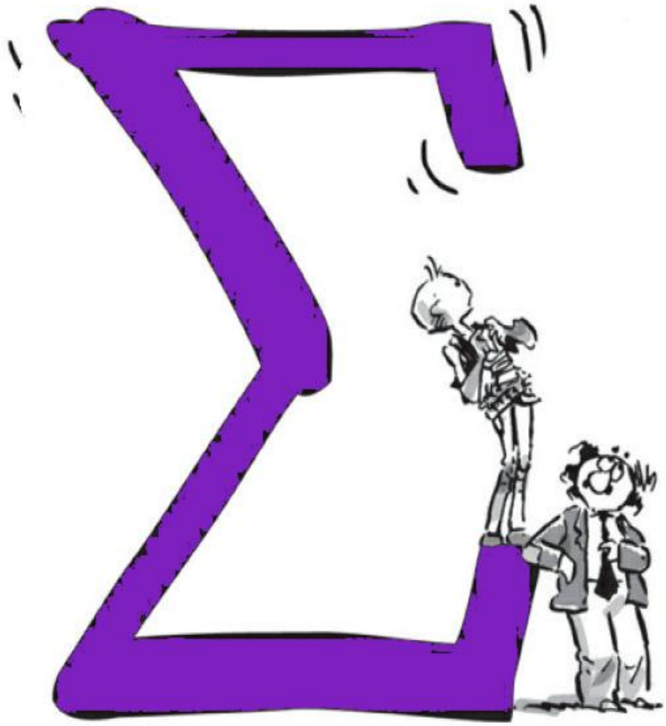
এতক্ষণ গল্প শোনালাম যোগজীকরণের৷

অন্তরীকরণের কাজ যদি হয় অতিক্রান্ত দূরত্ব থেকে বেগ বের করা অর্থাৎ,দূরত্বের পরিবর্তন হার বের করা তাহলে অন্তরীকরণের কাজ হলো বেগ থেকে অতিক্রান্তদূরত্ব বের করা মানে প্রতি অন্তরক।

আরেক অর্থে যোগজীকরণের কাজ ক্ষেত্রফল বের করা। বেশ কঠিন কঠিন উদ্ভট দেখতে ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

আবার এই যোগজীকরণ হলো যোগ। অসীম ধারার সমষ্টি বের করে।

কেন এতো যোগ?



এবার ধরো আমরা একটা ফাংশন y=f(x) এর গ্রাফ দ্বারা অক্ষের সাথে যে ক্ষেত্র তৈরী করে তার ক্ষেত্রফল বের করবো ছবিতে দেখতে পাচ্ছো তো কেমন বাকা-ট্যারা একটা ফাংশন। আগের পর্বে আমরা ক্ষেত্রফল বের করতে গিয়ে পেয়েছিলাম অসীম ধারা আশা করি মনে আছে। এজন্য এই পর্বে ধারা নিয়ে একটু কথা বলার দরকার আছে। আগে একটু ধারার গল্প শোনাই।

যে ধরনের ধারাই হোক একটা চিহ্নের মাধ্যমে প্রকাশের ব্যবস্থা করা যায় ধারার পদ সংখ্যাও নির্দিষ্ট করে দেয়া যায়। এই চিহ্নকে বলে Sigma Notation বা Summation Notation

সমান্তর ধারা হোক বা গুনোত্তর ধারার সব পদই একটা নিয়ম মেনে চলে এটা আশা করি সবার জানা আছে। নিচের উদাহরন গুলো লক্ষ্য করো,

S=1+3+5+7+…

এই ধারার n তম পদ হলো (এখানে,n হলো স্বাভাবিক সংখ্যা) 2n-1

দেখো এই রাশিটাতে যদি ক্রমাগত স্বাভাবিক সংখ্যার মান বসিয়ে দিতে থাকি ধারাটি পাওয়া যাবে

$$n = 1 \Rightarrow (2 \times 1) - 1 = 1$$
$$n = 2 \Rightarrow (2 \times 2) - 1 = 3$$
$$n = 3 \Rightarrow (2 \times 3) - 1 = 5$$

$$n = 4 \Longrightarrow (2 \times 4) - 1 = 7$$

এবার ধরো ধারাটির নির্দিষ্ট সংখ্যক পদ থেকে শুরু করে নির্দিষ্ট সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগ করতে চাই ধরো ১ম থেকে ৬ষ্ঠ পদ পর্যন্ত অর্থাৎ, আমাদের যোগ শুরু করতে হচ্ছে n=1 থেকে শেষ হচ্ছে n=6 এ

ইংরেজিতে Initial অর্থ আদি বা প্রারম্ভিক তাই প্রায়ই এই শব্দের প্রথম অক্ষর i ধারার সাধারণ পদ বোঝাতে এবং যোগ করার শুরু ও শেষের নির্দেশ দিতে ব্যবহার করা হয়।

ধারা প্রকাশ করার জন্য গ্রীক সিগমা চিহ্ন ব্যবহার করা হয় সেটার চেহারা এইরকম "$\sum$"

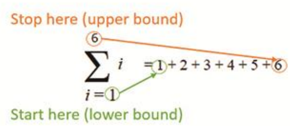
এই সিগমার ভিতরেই ধারার সাধারণ পদ রাখা হয় যেমন এক্ষেত্রে 2i-1 এক্ষেত্রে i স্বাভাবিক সংখ্যা এবং ধারার কততম পদ তা নির্দেশ করতে ব্যবহার হয়।

এবার আসছে কয়টা পদ যোগ করবো তা নির্দিষ্ট করে দেয়ার পালা। এজন্য $\sum$ চিহ্নের নিচে i কতো থেকে শুরু করতে হবে তা বলে দেয়া হয় এই নির্দেশকে বলা হয় Lower value যেমনঃ 1 থেকে যোগ করা শুরু হলে সিগমা চিহ্নের নিচে এভাবে লিখা হয় i=1

কোথায় যোগ করা শেষ করতে হবে তা বোঝানোর জন্য সিগমা চিহ্নের উপরে শুধু শেষ সংখ্যার মান বসাতে হয় একে বলা হয় Upper value

Summation Notation

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$



ছবিতে সিগমা নোটাশন কিভাবে ব্যবহার করতে হয় দেখিয়েছি।

আগেই বলেছি যেকোনো ধারাই সিগমা নোটেশন ব্যবহার করে প্রকাশ করা যায়। যদি কোনো ফাংশনে একটা ধারার সমষ্টি রূপে প্রকাশ করা যায় তাহলে সিগমা নোটেশন ব্যবহার করে লিখা যাবে।

জানো তো,$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

একটা জিনিস খেয়াল করো এখানে i তম পদের একটা সাধারণ চেহারা আছে $\frac{x^i}{i!}$

এটা একটা অসীম ধারা যেটা শুরু হবে i=0 তে শেষ হবে অসীমে মানে ∞

তাহলে সিগমা নোটেশনের মাধ্যমে লিখা যাবে $e^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ [এখানে কোনোভাবেই i কে অবাস্তব সংখ্যা মনে করা যাবে না]

একই ভাবে যদি বাইনোমিয়াম ধারাকে লিখা যায় তাহলে হবে,

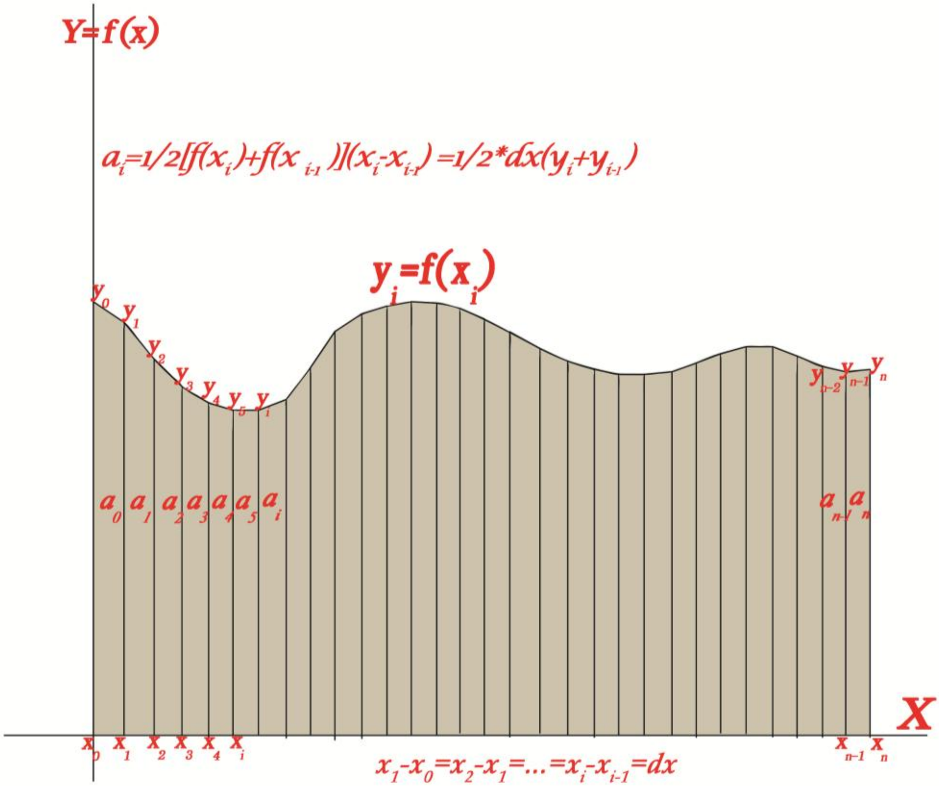
$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

স্বাভাবিক সংখ্যাকে নির্দেশ করার জন্য শুধুই যে i ব্যবহার করা হয় তা নয় j,k,n.. যেকোনো ধ্রুবক ও ব্যবহার করতে পারো।

এবার আসি অসীম ধারা দিয়ে ক্ষেত্রফল নির্নয়ে।

ছবিতে বক্ররেখা দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রটাকে অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ট্রাপিজিয়ামে ভাগ করা হয়েছে ধরে নিচ্ছি ছোট ট্রাপিজিয়াম গুলোর ক্ষেত্রফল $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \dots a_i$

সমগ্রক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল A



যদি সমগ্র ক্ষেত্রটি n সংখ্যক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ট্রাপিজিয়ামে বিভক্ত হয়ে থাকে তাহলে

$$\mathrm{A} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_i \dots + a_n$$

X অক্ষকে আমরা ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র n সংখ্যক ভাগে বিভক্ত করেছি প্রতিটি ভাগের দৈর্ঘ্য $dx = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}$

ধরে নিচ্ছি X অক্ষ বরাবর শুরুতে x_0, বিন্দুতে $x =$
0 x_0 থেকে dx দূরত্বে x_1 বিন্দু এভাবে ক্রমাগত $x_2, x_3 \ldots\ x_n$ বিন্দু গুলো পরস্পর থেকে dx দূরত্বে অবস্থিত

অর্থাৎ, $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_3 - x_4 = \cdots = x_i - x_{i-1} = dx$

আগেই বলে দিয়েছি $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$, তাহলে y অক্ষ বরাবর

$$x = x_0 \text{ হলে } y = f(x_0) = y_0$$

$$x = x_1 \text{ হলে } y = f(x_1) = y_1$$

$$x = x_2 \text{ হলে } y = f(x_2) = y_2$$

$$x = x_i \text{ হলে } y = f(x_i) = y_i$$

ছবিতে খেয়াল করো y অক্ষ বরাবর এই মান গুলো আসলে ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দেশ করে।

এবার চলো পিচ্চি পিচ্চি ট্রাপিজিয়াম গুলোর ক্ষেত্রফল বের করা যাক,

ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল= $\frac{1}{2}$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি) $\times$ বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

ক্ষেত্রফল $a_0 = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)(x_1 - x_0) = \frac{dx}{2}(y_0 + y_1)$

$$a_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = \frac{dx}{2}(y_1 + y_2)$$

....

$$a_n = \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)(x_n - x_{n-1}) = \frac{dx}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

এই মান গুলো নিয়ে পাই,

$$\mathrm{A} = \frac{dx}{2}(y_0 + y_1) + \frac{dx}{2}(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{dx}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

$$\Rightarrow A = \frac{dx}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$\Rightarrow A = y_0\frac{dx}{2} + y_1 dx + y_2 dx + \cdots + y_{n-1} dx + y_n\frac{dx}{2}$$

$$\Longrightarrow A = \frac{1}{2} \times f(x_0)dx + f(x_1)dx + f(x_2)dx + \cdots + \frac{1}{2} \times f(x_n)dx$$

আরো একটু বেশি পরিচয় দিয়ে লিখা যাক,

$$A = \frac{1}{2} \times f(x_0)dx + f(x_1)dx + f(x_2)dx + \cdots + \frac{1}{2} \times f(x_n)dx \text{ যেখানে, } dx = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n}$$

এটা কিন্তু দেখতে একটা ধারার মতো হয়েছে যদিও প্রথম আর শেষ পদে একটু ঝামেলা রয়েছে কিন্তু মোটামুটি একটা ধারা এটাকে সিগমা নোটেশন দিয়ে প্রায় সমান হিসেবে দেখানো যেতে পারে এভাবে,

$$A \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)dx$$

কিন্তু গণিত প্রায় সমান জিনিসটা পছন্দ করে না পছন্দ করে একদম সমান তাই সিগমা নোটেশনের চিহ্ন পাল্টে অন্য একটা সুন্দর চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। এই চিহ্নটা প্রথম ব্যবহার করেছিলেন গডফ্রিড লাইবনিজ,তিনি এটা *Summation* শব্দটির প্রথম অক্ষর s এর বর্ধিত রূপ হিসেবে $s \longrightarrow \int$ এই চিহ্নটিকে ব্যবহার করেছিলেন। বর্তমানে এটিই ইন্ট্রিগাল ক্যালকুলাসের চিহ্ন বা অপারেটর হিসেবে ব্যবহৃত হয়।

কাজেই আমরা ক্ষেত্রফলকে এই চিহ্ন দিয়ে লিখতে পারি নিচের মতো করে,

$$\int f(x)dx$$

অর্থাৎ, একটা ফাংশনের ইন্ট্রিগাল মানে ওই ফাংশনের গ্রাফ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল।

এই মোটামুটি ইন্ট্রিগাল ক্যালকুলাসের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা।

যোগজীকরণের কৌশল

আগেই বলে দেই অন্তরীকরণের ক্ষেত্রে যেমন আজব আজব চেহারার ফাংশনের অন্তরক বের করার উপায় ও বেশ সহজ,একটা মূল নিয়মের উপর ভিত্তি করে যেকোনো ফাংশনের অন্তরক বের করে ফেলা যায় এখানে একটা ফাংশন দেখে সেই ফাংশনের ইন্ট্রিগেশন কেমন হবে বলে দেয়া একটু কঠিন। যোগজীকরণের ক্ষেত্রে একটু কৌশল প্রয়োগ করতে হয়। ভিন্ন ভিন্ন আকারের ইন্ট্রিগালের জন্য কৌশল ও ভিন্ন ভিন্ন। এই কৌশল গুলো একদিনে আসে নি,সময় লেগেছে। আমার এই কথা বলার মানে এই না যে অন্তরীকরনের চেয়ে যোগজীকরণ কঠিন। ব্যাপারটা হলো কিছু সহজ কৌশল শিখতে হয় আর মনে রাখতে হয়।

আগেই বলেছিলাম যোগজীকরণ হলো অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়া। অন্তরকের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা হলো এটা কোনো বিন্দুতে ফাংশনের স্পর্শকের ঢাল নির্দেশ করে। সাধারনণত x চলকের ফাংশনকে অন্তরীকরণ করলে আরো একটা x চলকের ফাংশন পাওয়া যায় অনেকেই মনে করে অন্তরীকরণ করে যে ফাংশন পাওয়া যায় সেটা ওই ফাংশনের স্পর্শক হবে। কিন্তু কোথায় স্পর্শক কিভাবে স্পর্শক। জানো তো স্পর্শক আর কিছুই না ফাংশনের গ্রাফের কোনো বিন্দুকে স্পর্শ করে যাওয়া সরলরেখা। অন্তরীকরণ করে যেটা বের করা যায় সেটা হলো ওই ফাংশনের ঢালের সাংখ্যিক মান নির্নয়ের জন্য একটা ফাংশন ।

যেমন ধরো,

$$f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3x + 6$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 15x^2 + 4x + 3$$

এবার যদি প্রশ্ন করা হয় x=2 বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের ঢাল কতো হবে তাহলে অন্তরক তার উত্তর দিতে পারবে। ঢালের মান হবে,

$$15(2)^2 + (4 \times 2) + 3 = 71$$

আবার আসি যোগজীকরণের কথায়। যোগজ মানে হলো ফাংশনের যেকোনো বিন্দুতে ঢাল বের করা হয়েছে সেই ঢাল দেখে আসল ফাংশনটা কি ছিল তা বের করা এজন্যই একে প্রতিঅন্তরক বলা হয়। অর্থাৎ, যোগজীকরণের মাধ্যমে আসল ফাংশনকে ফিরিয়ে দেয়ার চেষ্টা করা হয়। কিন্তু সেই চেষ্টা যে শতভাগ সফল হয় তাও কিন্তু না। সেটা একটু পরে বলছি।

ধরো একটা ফাংশন, g(x) একে অন্তরীকরণ করলে পাওয়া যায় f(x)

এইরকম,

$$\frac{d}{dx}g(x) = f(x)$$

আগে বলেছিলাম অন্তরীকরন মানে x এর অতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য (dx) x এর ফাংশন এক্ষেত্রে g(x) এর পরিবর্তনের পরিমান এক্ষেত্রে dg(x)

তাহলে dg(x) হলো g(x) এর অতিক্ষুদ্র একটা অংশ আরেক দিকে dx হলো x এর অতিক্ষুদ্র একটা অংশ। এই দুইটার ভাগফল হলো অন্তরক। ভাগফলের মান যদি $f(x)$ হয় তাহলে নিচের মতো করে লিখা যাবে

$$\mathrm{dg(x)} = \mathrm{f(x)dx}$$

আগের পর্বে দেখিয়েছি ইন্ট্রিগাল আর কিছুই না একটা অসীম ধারা। যদি g(x) ফাংশনটির ক্ষুদ্র অংশ dg(x) গুলোকে যোগ করে দেই তাহলে সম্পূর্ন g(x) পাওয়া যাবে। এই ধারা যোগ করা বোঝাতে $\int$ চিহ্ন

$$\int \mathrm{dg(x)} = g(x)$$

তাহলে এভাবে লিখতে পারি,

$$\int \mathrm{dg(x)} = \int \mathrm{f(x)dx}$$

$$\mathrm{g(x)} = \int \mathrm{f(x)dx}$$

এখন g(x) কে বলা যাবে f(x) এর ইন্ট্রিগাল। ক্লিয়ার?

অন্তরীকরণের বেলায় যেমন x^n এর অন্তরক বের করেছিলাম এবার x^n এর যোগজ বের করবো। যেহেতু আমরা ইতিমধ্যে জেনেছি যোগজীকরণ হলো অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়া কাজেই এই প্রশ্নের উত্তর বের করতে হলে আমাদের এমন একটা ফাংশন বের করতে হবে যাকে অন্তরীকরণ করলে x^n পাওয়া যাবে।

মনে আছে চলকের উপর ধ্রুবক ঘাত রূপে থাকলে অন্তরীকরণের সময় ঘাত 1 কমে যায় তাই আমরা যদি 1 ঘাত বেশি নিয়ে শুরু করি তাহলে অন্তরীকরণের পর কাঙ্ক্ষিত জিনিসটা পাবো।

এক্ষেত্রে x^n পেতে x^{n+1} এর অন্তরক বের করবো। চলো করে ফেলা যাক,

$$\frac{dx^{n+1}}{dx} = (n+1)x^n$$

$$\Longrightarrow (n+1)x^n dx = dx^{n+1}$$

$$\Longrightarrow x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \int x^n dx = \frac{1}{n+1} \int dx^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

যদি $f(x)=x^5$ হয় তাহলে

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6}$$

এবার একটা বিষয় খেয়াল করো নিজের ফাংশন গুলো দেখো,

$$f(x) = x^2 + 2 \quad \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = 2x$$

$$g(x) = x^2 + 5 \quad \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = 2x$$

$$h(x) = x^2 + 7 \quad \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = 2x$$

প্রত্যেকটা ফাংশন আলাদা কিন্তু এদের অন্তরক একই। নিয়ম অনুযায়ী এই অন্তরক গুলো থেকে ফাংশন ফেরত পাবার কথা কিন্তু তা হচ্ছে কি।

লক্ষ্য করো $f(x),g(x),h(x)$ এদের অন্তরক থেকে কখনোই এদের প্রকৃত মান ফেরত পাওয়া যাবে না। পাওয়া যায় x^2 প্রতিবারই বাদ যাচ্ছে একটা ধ্রুবক,এমন যদি হয় যোগজ প্রতিঅন্তরক নামটাই হারিয়ে ফেলবে!! তাই এই সমস্যার সমাধান করতে সকল অনির্দিষ্ট যোগজের উত্তরের শেষে একটা ধ্রুবক c যোগ করে দেয়া হয়। c এর প্রকৃত মান কতো তা জানি না। কিন্তু কিছু একটা ধ্রুবক তো হবেই।

কাজেই এভাবে লিখা হয়,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \; n \neq 1$$

এখন আমরা অন্তরীকরণের সূত্র গুলো দেখে দেখে যোগজীকরণের জন্য বিপরীত সূত্র গুলো বানিয়ে ফেলবো

$$\frac{d}{dx}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx + c$$

শূণ্যের যোগজ এভাবে,

$$\frac{dc}{dx} = 0 \Longrightarrow \int 0\, dx = c$$

সূচক হিসেবে চলক থাকলে

$$\frac{da^x}{dx} = a^x lna$$

$$\Longrightarrow \int a^x \; dx = \frac{a^x}{lna}+c$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \; \Longrightarrow \int e^x\, dx = e^x + c$$

$$\frac{dlnx}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{x} dx = lnx + c$$

এভাবে প্রতিক্ষেত্রেই সূত্র বানিয়ে ফেলতে হবে। আজ আর দেখাচ্ছি না। তোমরা যদি বুঝে থাকো ত্রিকোণমিতিক ফাংশন গুলোর জন্য যোগজ বের করে ফেলো।

বসে বসে নিচের যোগজ গুলো বের করার চেষ্টা করো,

1. $\int 100x^{99}\, dx$

2. $\int x^{\frac{2}{3}} dx$

3. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

4. $\int \frac{x^3-8}{x-2}\, dx$

5. $\int 2^x dx$

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের যোগজীকরণ

আজ হবে ত্রিকোণমিতিক আর বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরক বের করার কাজ। একটাই উপদেশ নিচের গাণিতীক সমীকরণ গুলোর দিয়ে তাকিয়ে দেখো, বুঝবে।

শুরুতে একটা কথা বলে দেই

$\int dx$ এটার মানে হলো x এর অসীম সংখ্যক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র (শূন্যের খুবই কাছাকাছি) অংশ যোগ করা। ধরো x হলো l দৈর্ঘ্যের বাশ। যাকে একদম গুড়ো গুড়ো করে ফেলা হয়েছে পাওয়া গেছে dx তারপর আবার জোড়া দেয়া হচ্ছে তাহলে কি পাবো l দৈর্ঘ্যের বাশ মানে x। কিন্তু একটা সন্দেহ থেকে যায় যেহেতু অতিক্ষুদ্র অংশ যোগ করে বানানো জিনিস তাই অল্প একটু বেশি বা কম হতে পারে এজন্য লাস্টে যোগ করা হয় একটা ধ্রুবক c . এর মান কতো জানি না। আগের পর্বে এ ব্যাপারে বলেছি

এবার গাণিতীক ভাবে,

$$\int dx = \int x^0\, dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c$$

যদি এমন হয় $\int df(x)$

তাহলে হবে, $\int df(x) = f(x) + c$ ক্লিয়ার তো?

এবার অন্তরীকরণ বুঝে তাহলে নিচের যোগজীকরণ গুলো তোমার জন্য

$$\frac{dsinx}{dx} = cosx$$

$$\Rightarrow \int dsinx = \int cosx\, dx$$

$$\Rightarrow \int cosx\, dx = sinx + c$$

পরেরটা,

$$\frac{dcosx}{dx} = -sinx$$

$$\Rightarrow \int dcosx = -\int sinx\, dx$$

$$\Rightarrow \int sinx\, dx = -cosx$$

চলবে,

$$\frac{dtanx}{dx} = sce^2x$$

$$\Rightarrow \int dtanx = \int \sec^2 x\, dx$$

$$\Rightarrow \int \sec^2 x\, dx = tanx + c$$

আরো কিছু ইকুয়েশন,

$$\frac{dcotx}{dx} = -csc^2x$$

$$\Longrightarrow \int dcotx = -\int \csc^2 x\, dx$$

$$\Longrightarrow \int \csc^2 x\, dx = -cotx + c$$

$$\frac{dsecx}{dx} = secx.tanx$$

পড়তে খারাপ লাগছে,

$$\Longrightarrow \int dsecx$$

$$= \int secx.tanx\ \ dx$$

$$\Longrightarrow \int secx.tanx\ \ dx = secx$$

নেক্সট,

$$\frac{dcscx}{dx} = -cscx.cotx$$

$$\Longrightarrow \int dcscx = -\int cscx.cotx\ \ dx$$

$$\Longrightarrow \int cscx.cotx\ \ dx = -cscx$$

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের যোগজ,অংক করার সময় এই আকার গুলো চিনে এগুলোকে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের আকারে ফেরত দিতে হবে এটাই এই অংশের শিক্ষা,

$$\frac{dsin^{-1}x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Longrightarrow dsin^{-1}x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dsin^{-1}x$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = sin^{-1}x$$

আশা করি বুঝেছো,

$$\frac{dcos^{-1}x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\Rightarrow dcos^{-1}x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\Rightarrow -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dcos^{-1}x$$
$$\Rightarrow \int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = cos^{-1}x$$

পরের ফাংশন,

$$\frac{dtan^{-1}x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\Rightarrow dtan^{-1}x = \frac{dx}{1+x^2}$$
$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \int dtan^{-1}x$$
$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = tan^{-1}x$$

যদি রিয়্যাল লাইফে শেখাতাম তাহলে বোর্ডে এগুলো লিখার সময় কথাও বলতাম এখন সম্ভব হচ্ছে না দুঃখিত

$$\frac{dcot^{-1}x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$\Rightarrow dcot^{-1}x = -\frac{dx}{1+x^2}$$
$$\Rightarrow -\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dcot^{-1}x$$
$$\Rightarrow -\int \frac{dx}{1+x^2} = cot^{-1}x$$

আজকের পাঠ শেষের দিকে,

$$\frac{dsec^{-1}x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$
$$\Rightarrow dsec^{-1}x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$
$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int dsec^{-1}x$$
$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x$$

এবং শেষ করছি নিচের অংকটা দিয়ে,

$$\frac{dcsc^{-1}x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Longrightarrow dcsc^{-1}x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Longrightarrow -\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int dcsc^{-1}x$$

$$\Longrightarrow \int -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \csc^{-1} x$$

পরিচিত ফাংশনের অপরিচিত রূপ

ইন্ট্রিগাল বের করার সময় প্রথম ট্রিক হলো অংকের চেহারা দেখে তাকে চিনে নিতে হবে। শুরুতে কয়েকটা চেহারা দেখিয়ে দিবো তারপর বলবো এইরকম যদি কারো চেহারা হয় তাকে ইন্ট্রিগেশন করলে ঐ রকম হবে। এই চেহারা গুলো মনে রাখতে হবে। রিয়্যাল লাইফে মানুষ চেনা যতটা গুরুত্বপূর্ন এখানে গাণিতীক চেহারা গুলোও ততটাই গুরুত্বপূর্ন।

আগের অংশে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে আর বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ইন্ট্রিগাল বের করা নিয়ে কাজ করেছিলাম। এই পর্বে ফাংশন গুলো একটু কঠিন বানাবো।

$$y = sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a.\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a.\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow y = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

এবার ধরো অংক করার সময় এই রকম একটা জিনিস পাওয়া গেল, $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$ অথবা এইরকম থাকতে পারে $\int \frac{dx}{\sqrt{20 - x^2}}$

এখন তোমার কাজ হবে এই অংকের রূপটা চিনে ইন্ট্রিগাল টে বের করা। ইচ্ছে করলে এই রকমের অংক এরো কম্পলেক্স করা যাবে চলো একটু দেখে আসি।

$$\int \frac{dx}{\sqrt{20-x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{5}\sqrt{1-\frac{x^2}{20}}}$$

আরো এমন কঠিন থেকে কঠিনতর করা যাবে। যখন মাস্টারমাইন্ডরা বসে বসে বুয়েটের প্রশ্ন করেন তখন আসলে এই কাজটাই করা হয় তোমরা ইচ্ছে করলে এই অংক গুলোকে আরো ক্রিয়েটিভ উপায়ে আরো আরো উদ্ভট চেহারা বানিয়ে দাও যেন কেউ চিনতেই না পারে। এই কৌশলে টিচাররা স্টুডেন্টদের ধোকায় ফেলে এবার আমি শেখাচ্ছি কিভাবে সিস্টেম হ্যাক করে তোমরা বিষয়গুলো জেনে ফেলবা। গাবদা গাবদা দানবের মতো অঙ্ক দেখে ভয় না পেয়ে আগে থেকেই অংক গুলোকে হ্যাক করতে শিখো নিজে এইরকম তৈরী করো আর প্র্যাক্টিস করো,অন্যের বানানো অংকগুলোকে ধরে ফেলার এটাই কৌশল।

উপরের যে প্রমাণটা তো দেখলে এবার যদি শুধু মাইনাস দেয়া থাকতো তাহলে পাওয়া যেত $cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$. অর্থাৎ,

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

কোনো অংক যেরূপেই থাক তাকে যদি উপরের মতো করে লিখতে পারো অথবা, $c.\int -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ [এখানে c একটা ধ্রুবক] তাহলে ইন্ট্রিগালটাকে সোজাসুজি $c.cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ লিখতে পারবা।

$\int -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ কিভাবে আসবে সেই প্রমাণটা আর দেখালাম না আশাকরি এতোদিনে যেটুকু শিখিয়েছি যদি ভালোকরে শিখে থাকো তাহলে এমনিতেই পারবা।

$$y = \tan^{-1}(\frac{x}{a})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a\left(\frac{a^2+x^2}{a^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{a^2+x^2}{a}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2+x^2}$$

$$\Rightarrow \int dy = a\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \int \frac{dx}{a^2+x^2}$$

এইরূপের ইন্টিগ্রাল গুলোকে আরো কঠিন আকারে দেয়া যাবে ঠিক আগের মতোই তোমাদেরকে সময় নিয়ে ঘাটাঘাটি আর হ্যাক করতে হবে। এই হ্যাকিং আইডিয়াটা যার যার বাড়ির কাজ থাকলো।

আচ্ছা এবার বলো একই ইন্টিগ্রাল যদি সামনে মাইনাস থাকে তাহলে কি হবে। $\cot^{-1}(\frac{x}{a})$ তাই না? এই প্রমাণটা আর দিবো না যাদের প্রয়োজন খাতায় করে নাও।

ঠিক একইরকম ভাবে আরো দুইটা ইন্টিগ্রাল বের করা যাবে, $\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ আর $\csc^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ এই দুইয়ের জন্য

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}(\frac{x}{a})$$

$$-\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{cec}^{-1}(\frac{x}{a})$$

এতোক্ষণে যতটুকু শিখিয়েছি তাতে বেশ অনেক রকমের অংকই পারা যাবে কিন্তু প্রতিবন্ধকতাও রয়ে গেছে অনেক। পরের পদ্ধতিটা শিখলে এতোক্ষণের শিক্ষার পূর্ণতা আসবে আশা করি।

$\int(ax+b)^5dx$ যদি চালাক খুব চালাক হও তাহলে আমার আগেই এই ট্রিকটা হয়তো বুঝে ফেলসো !!

এই অংকটা দুই চারটা উপায়ে করা যাবে। প্রথমত বাইনোমিয়াল থিওরেম দিয়ে $(ax+b)^5$ কে ভেঙ্গে ছয়টা পদের একটা বহুপদী বানাতে পারো তারপর সহজ সূত্র দিয়েই কাজ শেষ! কিন্তু না বেশ কষ্টের এই পদ্ধতি। আমরা আরো সহজে শিখবো। আচ্ছা যদি এমন কিছু করা সম্ভব হয় যে পুরো ইন্টিগ্রালটা সম্পূর্ন ভিন্ন চলকের একটা ইন্টিগ্রালে পরিনত করা যায়,যেখানে কোনো x নেই কিন্তু x এর কোনো একটা এজেন্ট আছে।

ধরো আমরা ধরে নিলাম, ax+b=u

এবার ইন্টিগ্রালটাকে লিখা যাবে $\int(u)^5dx$ কিন্তু না কাজ পুরোপুরি হয় নি। ইন্টিগ্রালে x থাকা যাবে না x এর হয়ে যুদ্ধ করবে অন্য কেউ পরে যুদ্ধে জেতার পর ফলাফল নিতে আবার আসবে x .তাহলে চলো dx কেও পালটে ফেলি। আবারো বলছি মূল যুদ্ধে x থাকবে না,ফিরবে যোগজীকরণ নামক যুদ্ধের পর। এটা সত্যিই একটা যুদ্ধ একটা বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের নিজস্ব ক্ষেত্রফল বুঝে নেয়ার যুদ্ধ!!

এবার আমাদের কাজ dx কে du দিয়ে পাল্টে দেয়া,

$$u = ax + b$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = a$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{a}$$

আমরা পেরেছি dx এর ভূমিকায় du কে বসাতে!! যদিও একটা ধ্রুবক a সাথে রয়েছে সমস্যা নেই ধ্রুবকের দাম সবার কাছে সমান। ধ্রুবককে x যা মনে করে u ও তাই মনে করে। এবার dx এর মান বসিয়ে দিয়ে ইন্টিগ্রালটাকে লিখতে পারি,

$$\frac{1}{a}\int u^5 du = \frac{(u)^6}{a \times 6}$$

যুদ্ধ শেষ x এর ফাংশনের বক্ররেখা দিয়ে তৈরী রাজ্যের ক্ষেত্রফল বের হয়েছে। এবার ফিরে আসছেন x

$$\int (ax+b)^5 dx = \frac{(ax+b)^6}{6a}$$

আচ্ছা এবার ধরো যদি এমন হতো, $\int (ax^2 + bx + c)^5 dx$ তাহলে কি একইভাবে সম্ভব ছিলো কাজটা করা? উত্তর হচ্ছে না।

এক্ষেত্রে যদি $z = ax^2 + bx + c$ ধরা হয় তাহলে dz এর মান কখনোই x মুক্ত পাওয়া যাবে না ,মানে কাজ ও হবে না। সুতরাং মনে রাখতে হবে এই পদ্ধতিটা কার্যকর যখন একটা জটিল ফাংশনের ভিতরে থাকা ফাংশনটির অন্তরক শুধু একটা ধ্রুবক। আর কখনো নয়।যাইহোক এই পদ্ধতির নাম প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

এবার এই প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে তোমরা

$$\int \sin(ax+b)dx\,, \int \cos(ax+b)dx\,, \int \frac{dx}{(ax+b)}\,, \int (ax+b)^5 dx\,, e^{ax+b},$$

সংকেতঃ $ax + b$ এটাকে অন্য কোনো চলক দিয়ে প্রকাশ করো তারপর সেই চলকের মাধ্যমে dx কে প্রকাশ করো। সব গুলো আকারের অংকই পারা যাবে।

এই ধরণের ফাংশন গুলোর ইন্টিগ্রাল বের করতে পারবা।

আর একটা অংক করে উদাহরণ দেয়া যাক,

$$\int \frac{dx}{4 + 9x^2}$$

এই অংকটাতে x এর ঘাত দুই আছে মনে হচ্ছে এটাকে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করা যাবে না। কিন্তু দেখো যদি এভাবে করি তাহলে কি দাড়াচ্ছে,

$$\int \frac{dx}{4+9x^2} = \int \frac{dx}{(2)^2+(3x)^2}$$

এবার ধরে নিচ্ছি $u = 3x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Longrightarrow dx = \frac{du}{3}$

এবার ইন্ট্রিগালটা দাড়াচ্ছে, $\frac{1}{3}\int \frac{du}{(2)^2+(u)^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{u}{2}) = \frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{3x}{2})$

একই ভাবে থাকতে পারে,

$\int \frac{dx}{(a)^2+(bx+c)^2}$ এই আকারের অংক গুলো বিচিত্র রকমের a,b,c এর মান আর $(bx+c)^2$ বর্গ ভেঙ্গে লিখলে এই অংক গুলোর যা চেহারা হয় সত্যি ভয় পাওয়ার মতো তোমাদের বলবো এভাবে বিভিন্ন রকম ভাবে বিচিত্র চেহারার অংক নিজে বানাও তারপর প্র্যাক্টিস করো। ক্লিয়ার হয়ে যাবে। তারপর যখন বুয়েটের প্রশ্নে বড় বড় সব কঠিন অংক দেয়া হবে তিন মিনিট সময় পাবে সলভ করার জন্য। তখন তোমার তিন মিনিট লাগবে না আরো কম লাগবে।

অংশায়ন পদ্ধতি

এতোক্ষণ যা যা শিখেছো তারপরেও $\int lnx\ dx$, $\int x^3 sinxdx$, $\int cosx\ lnxdx$, এই ধরনের ফাংশন গুলোর অন্তরক বের করতে দিলে কাজটা অসম্ভব কঠিন হয়ে পরবে। আজকে এই ধরনের ফাংশনকে ইন্ট্রিগেশন করার পদ্ধতি শিখাবো।

দুটি ফাংশন গুনফল রূপে থাকলে তাদের অন্তরক কিভাবে বের করতে হয় মনে আছে আশাকরি,

ধরে নিচ্ছি u এবং v দুইটাই x এর ফাংশন। তাহলে এই দুই ফাংশনের গুনফল আরো একটা x এর ফাংশন হবে এইটুকু তো ক্লিয়ার?

ধরে নিচ্ছি x এর এই দুই ফাংশনকে গুন করলে পাওয়া যায় y

তাহলে $y = uv \implies \frac{d}{dx}(uv) = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$

এই সূত্রের প্রমাণটা সিরিজের অনেক সামনে দেয়া আছে

এবার প্রাপ্ত সমীকরণটির উভয়পাশকে dx দ্বারা গুন করে দিতে পারি,তাহলে পাওয়া যাবে

$$\mathrm{d(uv) = udv + vdu}$$

$$\implies \int duv = \int udv + \int vdu$$

$$\implies uv = \int udv + \int vdu$$

$$\implies \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

পেয়ে গেলাম ইন্ট্রিগেশনের সুন্দর একটা সূত্র। একটা জিনিস লক্ষ্য করো এই সূত্রটা একটা ফাংশনের ইন্ট্রিগালকে দুইটা ফাংশনের সমষ্টি বানিয়ে দিচ্ছে মানে দুইটা অংশে ভাগ করে দিচ্ছে এজন্য ইন্ট্রিগেশনের এই পদ্ধতিটিকে বলা হয় অংশায়ন পদ্ধতিতে অন্তরীকণ । এই পদ্ধতি কিভাবে প্রয়োগ করতে হয় চলো দেখানো যাক।

আমরা বেশ একটা সহজ ফাংশন নিয়ে নিচ্ছি

$\int lnx\ \ dx$

এবার এই ইন্টিগ্রালটা $\int u\ dv$ আকারে লিখতে হবে ।

$\mathrm{u} = \mathrm{lnx}\,,\mathrm{dv} = \mathrm{dx}$ এটা ধরে নিলে $\int u\ dv = \int lnx\ \ dx$

চলো আগে প্রয়োজনীয় মান গুলো বের করে নেয়া যাক,

$$dv = dx$$

$$\Rightarrow \int dv = \int dx$$

$$\Rightarrow v = x$$

এবার চাই du এর মান

$$\mathrm{u} = \mathrm{lnx}\ \Rightarrow \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = \frac{1}{x}\ \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

এবার সূত্র অনুযায়ী লিখা যাবে,

$$\int lnx\ dx = xlnx - \int x \times \frac{dx}{x}$$
$$= xlnx - \int dx$$
$$= xlnx - x + c$$

না বুঝলে খাতা কলম নিয়ে আরো একবার চেষ্টা করো আশাকরি ক্লিয়ার হয়ে যাবে।

এখনো যেকোনো এই পদ্ধতিতে যেকোনো ফাংশন নিয়ে কাজ করতে গেলে বড় ধরণের ধাক্কা খেতে পারো। আরো একটা উদাহরনের মাধ্যমে ক্লিয়ার করা যাক,

এবার একটা ইন্ট্রিগাল নিচ্ছি,

$$\int x\ sinx\ dx$$

এই ইন্ট্রিগালটাকে $\int u\ dv$ আকারে যদি প্রকাশ করতে চাই তাহলে এভাবে করতে পারি,

এক, $u = sinx\ , dv = x\ dx$ তাহলে পাওয়া যাবে $\int u\ dv = \int x\ sinx\ dx$

দুই,$u = x, dv = sinx\ dx$ তাহলেও $\int u\ dv = \int x\ sinx\ dx$

এবার বুদ্ধি খাটিয়ে বলতে হবে কোনটা বেশি সুবিধাজনক হবে। দেখো আমরা যখন এই পদ্ধতিতে একটা ইন্ট্রিগাল বের করার চেষ্টা করি তখন u ধরে নেয়া জিনিসটাকে অন্তরীকরণ করতে হয় আর dv ধরে নেয়া জিনিসটাকে যোগজীকরণ করতে হয়। কাজেই সবচেয়ে বুদ্ধিমানের কাজ হবে যেটার অন্তরক বের করা সহজ সেটাকে u আর যেটার যোগজ বের করা অপেক্ষাকৃত সহজ সেটাকে dv ধরে নেয়া।

এক্ষেত্রে আরো একটা বিষয় বিবেচনা করা যেতে পারে লক্ষ্য করে থাকবে কোনো কোনো ফাংশনকে অন্তরীকরণ করার পর বার বার অন্তরীকরণ করা যায় যেমনঃ$sinx$ এর অন্তরক $cosx$ এই $cosx$ এর অন্তরক বের করলে আবার পাওয়া যায় $-sinx$ এভাবে অসীম সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করা সম্ভব। কাজেই একে যদি u ধরি তাহলে du এর মানটা জটিল হয়ে যাবে। এজন্য যেসব ফাংশন অপেক্ষাকৃত বেশি সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করা সম্ভব তাদের u না ধরাই সবচেয়ে ভালো সিদ্ধান্ত।

অপরদিকে u ধরে নেয়ার জন্য আছে x . একে শুধুমাত্র একবার অন্তরীকরণ করা যায় এজন্য du এর মান বেশ সরল হবে।

কাজেই যে ফাংশনকে অপেক্ষাকৃত কম সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করা যাবে এবং অন্তরীকরণ করা সহজ তাকে u ধরা সুবিধাজনক

একই সাথে যে ফাংশনকে যোগজীকরণ করা সহজ সেটাকে v ধরা সুবিধাজনক ।

$\int x\ sinx\ dx$ এর ক্ষেত্রে ধরে নিচ্ছি, $\mathrm{u = x}$ এবং $\mathrm{dv = sinx\, dx}$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = 1$$
$$\Rightarrow \mathrm{du = dx}$$

এবার v এর মান বের করে ফেলি,

$$\mathrm{dv = sinx\, dx}$$

$$\Longrightarrow \int dv = \int sinx\, dx$$
$$\Longrightarrow v = -cosx$$

সম্পূর্ন ইন্ট্রিগালটাকে লিখতে পারি,

$\int x\ sinx\, dx = -x\ cosx - \int -cosx\, dx = -xcosx + sinx$ +c

এধরণের আরো জটিল প্রকৃতির অংক গুলো সমাধান করার সময় আবার এমন একটা ইন্ট্রিগাল চলে আসতে পারে যার জন্য আবারো একই পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হবে।

যেমন, $\int x^3\ sinx\, dx$ এর যোগজ নির্নয়ের জন্য তিনবার অংশায়ন পদ্ধতি ব্যবহার করতে হবে তারপরে যোগ বিয়োগ করে আসল ফলাফল পাওয়া যাবে। একটু ধৈর্য নিয়ে এই কাজগুলো করতে হয়।

আর একটা কথা কতো বার অংশায়ন পদ্ধতি ব্যবহার করতে হবে সেটা নির্ভর করে u ধরে নেয়া ফাংশনটিকে কতোবার অন্তরীকরণ করা সম্ভব হচ্ছে তার উপর।

তবে মাঝে মাঝে পদ্ধতিটা সহজ হয়ে যায় কিছু কিছু কারনে। যেমন সমাধান করার সময় ডান পক্ষেও যেটা নিয়ে কাজ শুরু করা হয়েছিল সেই জিনিসটাই ফেরত পাওয়া।

যেমন ধরো,

$$I = \int e^x sinx\, dx$$

এক্ষেত্রে যে দুটি ফাংশন আছে প্রত্যেককেই অসীম সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করা যাবে এবার u,v নির্বাচনের জন্য সুচক ফাংশনকে u হিসেবে নির্বাচন করলে বেশি সুবিধা পাওয়া যাবে। আমরা তাই করছি,

$$u = e^x$$
$$\Longrightarrow \frac{du}{dx} = e^x$$
$$\Longrightarrow du = e^x\, dx$$

এবং ধরে নিচ্ছি,

$$dv = sinx\, dx$$
$$\Longrightarrow \int dv = \int sinx\, dx$$
$$\Longrightarrow v = -cosx$$

এবার ইন্ট্রিগালটা দাড়াচ্ছে,

$$\int e^x sinx\, dx = e^x(-cosx) - \int -e^x cosx\, dx$$
$$\Longrightarrow \int e^x sinx\, dx = -e^x cosx + \int e^x cosx\, dx$$

আবারো দেখো এমন একটা পদ চলে এসেছে যেটাকে আবারো অংশায়ন পদ্ধতিতে অন্তরীকরণ করার প্রয়োজন হচ্ছে।

একই কাজটা আবার করছি এক্ষেত্রে $u = e^x$ এবং $dv = cosx\, dx$

তাহলে পাওয়া যাবে,

$$\int e^x cosx\, dx$$

$$= e^x sinx - \int e^x sinx\, dx$$

$$= e^x sinx - I$$

দেখো আবারো যেখান থেকে শুরু করেছিলাম সেখানে ফিরে এসেছি $I = \int e^x sinx\, dx$

এবার মূল ইন্ট্রিগালে মান বসিয়ে দিয়ে পাই,

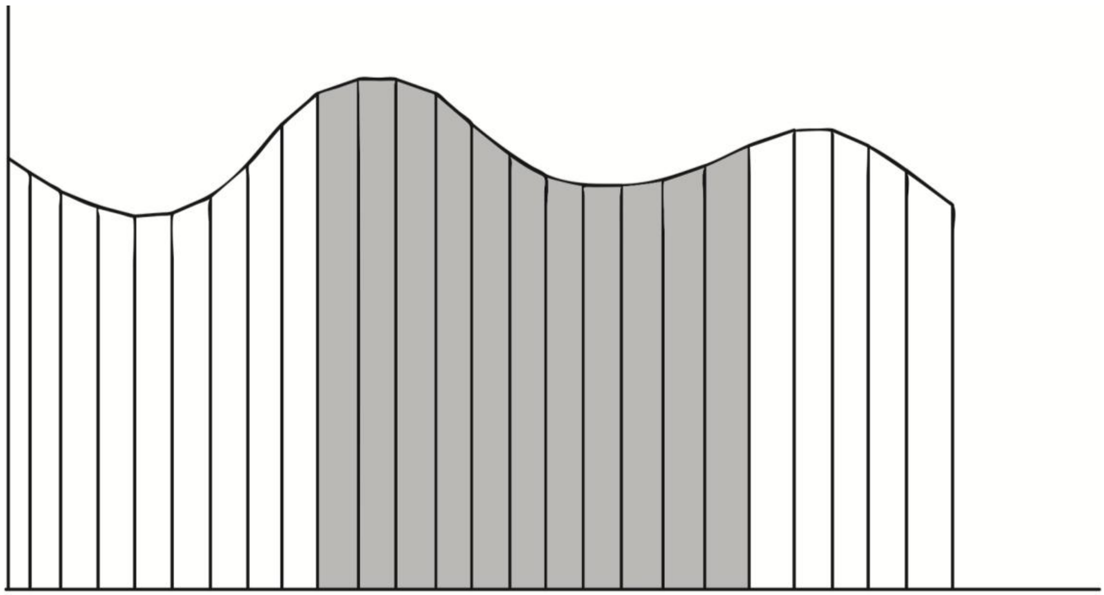
$$\Longrightarrow \int e^x sinx\, dx = -e^x cosx + \int e^x cosx\, dx$$

$$\Longrightarrow I = -e^x cosx + e^x sinx - I$$

$$\Longrightarrow 2I = e^x sinx - e^x cosx$$

$$\Longrightarrow I = \frac{e^x}{2}(sinx - cosx)$$

নির্দিষ্ট যোগজ



একটা ফাংশনের যোগজীকরণ বলতে আসলে বোঝায় ঐ ফাংশনের গ্রাফ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফলের একটা রাশিমালা। যেমন একটা বক্ররেখা যদি x^2 এই ফাংশনের গ্রাফ হয় তাহলে তার যোগজ $\frac{x^3}{3}$ হবে ওই ফাংশনের গ্রাফ দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফলের রাশি। রাশি বলতে বোঝায় পরিমান নির্ধারক চলকের মাধ্যমে প্রকাশিত কোনো পরিমাপ। এই রাশিতে x এর যেকোনো মান বসিয়ে দিলে গ্রাফে মূল বিন্দুর সাপেক্ষে ভূমি বরাবর x এর নির্দিষ্ট মান পর্যন্ত আকা গ্রাফ অক্ষদ্বয়ের সাথে যেটুকু ক্ষেত্রফল দখল করে তার মান। ধরো, x=5 বসানো হলো তখন যে মান পাওয়া যাবে তা হলো x অক্ষ বরাবর 5 একক দূর পর্যন্ত গ্রাফ দ্বারা যে অংশ দখল করে তার ক্ষেত্রফল।

এবার ছবির দিকে তাকাও। ধরো ছবিতে f(x) ফাংশনের গ্রাফ আকা হয়েছে আমাদের গ্রাফের ধূসর অংশটুকুর ক্ষেত্রফল দরকার। ধূসর অংশ শুরু হয়েছে x=a বিন্দুতে এবং শেষ হয়েছে x=b বিন্দুতে। আমাদের এইটুকু অংশের ক্ষেত্রফলের নির্দিষ্ট যে মান সেটা দরকার।

তাহলে একটা সোজা জিনিস বুঝলেই চলবে যদি x=0 থেকে x=b বিন্দু পর্যন্ত অংশের ক্ষেত্রফল বের করে তার থেকে x=0 থেকে x=a বিন্দু পর্যন্ত অংশের ক্ষেত্রফল বিয়োগ করে দেই তাহলেই আমাদের কাঙ্ক্ষিত ক্ষেত্রফলের মান পেয়ে যাবো।

ধরো, f(x) এর ক্ষেত্রফল বের করার জন্য একে ইন্টিগ্রেশন করলে যে রাশি পাওয়া যায় বা ফাংশন পাওয়া যায় তাহলো $\int f(x)\, dx = g(x) + C$

x=0 থেকে x=b পর্যন্ত ক্ষেত্রফল $g(b)$

আবার, x=0 থেকে x=a পর্যন্ত ক্ষেত্রফল g(a)

তাহলে ধূসর অংশটুকুর ক্ষেত্রফল = $g(b) - g(a)$

লক্ষ্য করো সাধারণ ইন্টিগ্রাল যেখানে ফাংশন যে এলাকায় বিস্তৃত সেই অংশের একটা অনির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে এই মানটা অনির্দিষ্ট এজন্য এর সাথে যোগজীকরণের ধ্রুবক ব্যবহার করার প্রয়োজন হয়। কিন্তু যখন গ্রাফের এলাকা নির্দিষ্ট করে দেয়া হয় তার মান হয় নির্দিষ্ট এবং ধ্রুব,এজন্য এই মানের সাথে ধ্রুবক থাকে না।

যে নিম্ন মান থেকে উচ্চ মান পর্যন্ত ক্ষেত্রফল নির্নয় করা হয় তাদেরকে যথাক্রমে নিম্নসীমা ও উচ্চসীমা বলা হয়ে থাকে এবং ইন্ট্রিগেশন চিহ্নের উপরে উচ্চসীমা ও নিচে নিম্নসীমা লিখে প্রকাশ করা হয়। ফাংশনের ইন্ট্রিগাল বের করার পর তা তৃতীয় বন্ধনীর মধ্যে লিখে বন্ধনীর উপরে ও নিচে এই মান বসিয়ে দিয়ে হিসাব করা হয়। লিখার নিয়মটা ছবিতে দেখানো হলো।

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx}$$

$$= [\mathbf{g(x)}]_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$$

$$= \mathbf{g(b) - g(a)}$$

এবার এতোক্ষণ যা যা বলেছি একটা উদাহরন দিয়ে বুঝানো যাক।

ধরো একটা ফাংশন $f(x) = x^2$ এখন বলা হলো এই ফাংশনটির x=2 থেকে x=5 পর্যন্ত গ্রাফ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল কতো?

আমরা প্রথমেই ইন্ট্রিগেশন করে ক্ষেত্রফলের রাশিমালা বের করে নিচ্ছি

$$\int f(x)\,dx = x^3 + c$$

এবার ক্ষেত্রফলের জন্য যে রাশি পেয়েছি সেটা ধরে নিচ্ছি g(x)=$\frac{x^3}{3} + c$

একটু আগে শিখানো কৌশল অনুযায়ী ক্ষেত্রফল দাড়াচ্ছে, $g(5) - g(2)$

অর্থাৎ, x=2 থেকে x=5 পর্যন্ত গ্রাফ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল

$$=\mathrm{g}(5) - \mathrm{g}(2)$$

$$= \frac{(5)^3}{3} - \frac{(2)^3}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(125 - 8)$$

$= \frac{117}{3}$ বর্গ একক

যদি বুঝে থাকো তোমরা নিচের সহজ ফাংশন গুলো দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের করে ফেলো,

১।$\frac{1}{x}$ ফাংশন দ্বারা x=o থেকে x=e পর্যন্ত অংশের ক্ষেত্রফল

২।sinx এর গ্রাফ দ্বারা x=0 থেকে x=$\frac{\pi}{2}$ অংশের ক্ষেত্রফল

৩।x^3 ফাংশন দ্বারা আবদ্ধ x=0 থেকে x=5 অংশের ক্ষেত্রফল

এই ইবুকটা একটা বিশেষ দিনে প্রকাশিত হয়েছিল তাই তোমাদের সবাইকে

$$\int_{e^{-mubarak}}^{e^{Eid}} \frac{dx}{x}$$

ইচ্ছা করলে তোমরা তোমাদের নিজের আর প্রিয় মানুষের নাম লিমিটে বসিয়ে মজার কিছু গণিত তৈরী করতে পারো।

এবার যতটুকু শেখানো হয়েছে তা দিয়ে তোমরা ইচ্ছে করলে আইনস্টাইনের বিখ্যাত ভর-শক্তির সমীকরণের প্রমাণটাও বুঝে নিতে পারবে। যারা ভালো করে শিখেছো তারা এখন রিলেটিভিটি কোয়ান্টাম মেকানিক্স বেশ ভালো ভাবেই বুঝবা।

ক্যালকুলাস ব্যবহার করে ভর শক্তির সমীকরণের প্রমাণ

এখানে ভর-শক্তির সমীকরণের প্রমাণটা আসল ক্যালকুলাসের অ্যাপ্লিকেশন হিসেবে দিলাম। এই সমীকরণকে পুরোপুরি জানতে হলে আগে অয়েছে অনেক গুলো ধাপ। যাদের আপেক্ষিক ভরবেগ পর্যন্ত ধারণা ছিল কিন্তু ক্যালকুলাস না জানায় এতোদিন ঝামেলায় ছিলা তাদের জন্য এই প্রমানটা কাজে আসবে অন্যথায় না। যারা স্পেশাল রিলেটিভিটি জানো না তারা নিশ্চিন্তে এই অংশটা স্কিপ করতে পারো।

এখন এমন একটা জায়গায় যাচ্ছি যেখানে গণিত আর পদার্থবিজ্ঞান একদম এক আলাদাভাবে চেনা যাবে না। আমরা আইনস্টাইনের অসাধারণ চিন্তাশক্তি থেকে প্রাপ্ত ফলাফলের সাথে মিশিয়ে দেবো একটু আগে শেখা গণিত যার ফলাফল হবে আরো মারাত্নক। ফলাফল কি জানোঃ আমি তুমি আমরা প্রত্যকে আসলে শক্তিরই একটা রূপ। ভরশক্তির সমীকরণ বলছে ভর থেকে শক্তি আর শক্তি থেকে ভর হওয়া সম্ভব নিমিষেই তাই ভর আর শক্তি একই জিনিস!

আমরা জানি,কোনো বস্তুকে গতিশীল করতে বা গতিবেগ বাড়াতে বল প্রয়োগ করতে হয়। বল প্রয়োগে বস্তুটি কিছু দুরত্ব অতিক্রম করে এবং বেগের পরিবর্তন হয়। বল প্রয়োগের ফলে বস্তু যে দূরত্ব অতিক্রম করে এবং এবং যে বলের ক্রিয়ায় এই দূরত্ব অতিক্রম করে তার গুন ফলকে কাজ বা ব্যায়িত শক্তি হিসেবে সঙ্গায়িত করা হয়।

যদি m ভরের বস্তুর উপর F বল প্রয়োগের ফলে এটি s দূরত্ব অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয় তাহলে কৃত কাজ বা ব্যায়িত শক্তি

E= Fs

যেহেতু, বলের ক্রিয়ায় বস্তু কিছু বেগ প্রাপ্ত হয়। এর ফলে বস্তুর মধ্যে ঐ গতি অর্জন করতে যে কাজ হয় তা সঞ্চিত থাকে। বস্তুর মধ্যে গতির কারনে সংরক্ষিত এই শক্তি কে গতিশক্তি (Kynetic Energy) বলা হয়।

সুতরাং, কৃত কাজ আর গতিশক্তি সমান হয় $W = KE$।

সনাতন বলবিদ্যায় গতিশক্তির সমীকরনটা এবার প্রমান করা যাক,

যদি বস্তুর উপর F বল প্রয়োগে মোট সরন হয় s। এর অতি ক্ষুদ্র অংশ ds বিবেচনা করলে এইটুকু সরনের জন্য কৃত কাজ বা গতিশক্তি হবে অতি ক্ষুদ্র ধরে নিছি এই কাজের পরিমান dW

যেহেতু অতি ক্ষুদ্র অংশ পেয়েছি। তাহলে সমিকরনটিকে ইন্ট্রিগেশন $(intregation)$ করলে সমগ্র কাজটি পেয়ে যাব। প্রথমে বস্তুটির বেগ ছিল U এবং কৃত কাজ ও ছিল 0 বল প্রয়োগের ফলে V বেগ প্রাপ্ত হওয়ায় যে কাজ হলো বা গতিশক্তি অর্জন করলো তা

$$\int_0^w dW = \int_u^v F.ds$$

$$W = \int_u^v \frac{d}{dt} mv\, ds$$

$$KE = m\int_{u}^{v} \frac{dv}{dt} ds$$

$$= m\int_{u}^{v} \frac{ds}{dt} dv$$

$$= m\int_{u}^{v} v\, dv \quad = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_u^v$$

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

যদি আদিবেগ শূন্য হয় মানে স্থির কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের প্রভাবে কৃতকাজ বা গতিশক্তি

$$= m\int_{o}^{v} v\, dv \ = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_o^v$$

$$\mathrm{KE} = \frac{1}{2}mv^2$$

এতক্ষণ আমরা যে গতিশক্তি বের করেছি তা সনাতন বলবিদ্যার গতিশক্তির সমীকরন। কিন্তু আপেক্ষিক তত্ত্বে বলের প্রয়োগে বেগ যতোই বাড়ে ভর ও বেড়ে যায়। একটু আগে যে সমিকরণ প্রমান করা হয়েছে তাতে এই ধারনা ব্যবহার করা হয় নি তাই এই সমীকরন ব্যাবহার করলে সবক্ষেত্রে গতিশক্তি সঠিক হবে না। আপেক্ষিক ভরের ধারনা ব্যাবহার করে গতিশক্তি হিসাব করলে এই সাধারন সমিকরন টা একেবারেই পালটে যাবে। এখান থেকে জগতের সবচেয়ে চমৎকার সম্পর্কটা পাওয়া যাবে। সবাই নিশ্চয় ধারণা করতে পারছে কিসের কথা বলছি।

এবার আপেক্ষিক গতিশক্তির সমীকরন বের করার কাজটা শুরু করা যাক।প্রথমে সনাতন বলবিদ্যার মতো করেই শুরুটা। শুরুতে বেগ শূন্য ছিল কৃত কাজ ও শূন্য S সরনে এগিয়ে যাওয়ার পর কাজ হলো W তাহলে,

$$\int_{0}^{w} dW = \int_{o}^{s} FdS$$

$$KE = \int_{0}^{s} Fds$$

$$= \int_{0}^{s} \frac{dp}{dt} ds$$

$$= \int_0^s \frac{ds}{dt} dp$$

$$= \int_0^v v dp$$

উপরে গতি শক্তিটা আদর্শ যোগজের রূপে পেয়েছি। রূপটা হলো এই রকম

$$\int \boldsymbol{VdU} = \boldsymbol{UV} - \int \boldsymbol{UdV}$$

এক্ষেত্রে $U = v\ , dV = dp$ বসালে প্রকৃত গতিশক্তির মানটা পেয়ে যাব।তার আগে বেগের ডিফারেন্সিয়াল dv ও ভরবেগের ডিফারেন্সিয়াল dp থেকে বেগ আর ভর বেগটা বের করে ফেলা যাক

$$\int_0^v dv = \int_0^v dp$$

$$v = p$$

$v = p$ গতিশক্তির সমীকরেনে বসিয়ে পাই, $KE = pv - \int_0^v pdv$

$$= (mv)v - \int_0^v mvdv$$

$$= mv^2 - \int_0^v mvdv$$

এখানে মোট গতিশক্তির প্রথম অংশটি বেশ সরল কিন্তু আরো একটি অংশ একটি জটিল যোগজ রূপে পেয়েছি এটাকে ধীরে ধীরে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজীকরন করার প্রয়োজন হবে। কাজটা বেশ সহজ কিন্তু একটু বড় তাই সবাইকে ধৈর্য্য নিয়ে দেখার জন্য বলছি। গতিশক্তির জটিল অংশটা নিম্নরূপঃ

$$\int_0^v \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dv$$

$x = \frac{v^2}{c^2}$ ধরি,এবং ডিফারেন্সিয়াল dv বের করি আমাদের মূল উদ্দেশ্য V কে X দ্বারা প্রতিস্থাপন করে ফেলা

$$\frac{dx}{dv} = \frac{2v}{c^2}$$

$$=> dv = \frac{c^2}{2v} dx$$

$$m_0c^2\int_0^v \frac{v}{2v\sqrt{1-x}}dx$$

$$= m_0c^2\int_0^v \frac{1}{2\sqrt{1-x}}dx$$

আবার x কে y দ্বারা প্রতিস্থাপন করতে হবে ধরি, $y = \sqrt{1-x}$

$$dx = -2\sqrt{1-x}\,dy$$

X কে Y দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$m_0c^2\int_0^v \frac{-2y}{2y}dy$$

$$= -m_0c^2\int_0^v dy$$

$$= -m_0c^2[dy]_0^y$$

Y এর মান বসিয়ে পাই,

$$= -m_0c^2\left[\sqrt{1-v^2/c^2}\right]_0^v$$

$$= -m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2} + m_0c^2$$

$$KE = mv^2 + m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2} - m_0c^2$$

$$= mv^2 + \frac{m_0c^2(1-v^2/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2$$

$$= mv^2 + mc^2(1-v^2/c^2) - m_0c^2$$

$$= mv^2 + mc^2 - mv^2 - m_0c^2$$

$$= mc^2 - m_0c^2$$

$$KE = mc^2 - m_0c^2$$

$$m = m_0 + \Delta m$$

$KE = \Delta mc^2$ আপেক্ষিক তত্ত্ব ব্যাবহার করে যে গতিশক্তির সম্পর্ক পাওয়া গেছে তা প্রকৃত পক্ষে আলোর বেগ, ভর আর শক্তির মধ্যে একটা সম্পর্ক নির্দেশ করছে। অর্থাৎ, গতি শক্তি আর কিছুই নয় বেগ প্রাপ্ত হওয়ার পর স্থির ভরের বৃদ্ধি ঘটেছে আর যে পরিমান ভর বেড়েছে তাকে আলোর বেগের বর্গ দ্বারা গুন করলে যা পাওয়া যাবে তাই হলো গতিশক্তি। এখান থেকে প্রাপ্ত ফলাফল ভর আর শক্তিকে নতুনভাবে ব্যাখ্যা করে।

নিচে বেগ আর আপেক্ষিক গতিশক্তির একটি গ্রাফ দেওয়া হয়েছে। একই সাথে ক্লাসিক গতিশক্তি (Classical kinetic Energy) দেওয়া হয়েছে। যাতে এদের পার্থক্য বোঝা যায়। দেখা যাচ্ছে নিম্ন বেগের ক্ষেত্রে ক্লাসিক আর আপেক্ষিক গতিশক্তির মধ্যে তেমন পার্থক্য না থাকলেও বেগ বাড়ার সাথে সাথে ফলাফল সম্পুর্ন পাল্টে যায়।

আমরা গতিশক্তি হিসাব করেছি কিন্তু সেই শক্তি আসছে কোথা থেকে? আসলে শক্তিটা এসেছিল ভর থেকে। বস্তুটি গতিশীল হওয়ায় যে পরিমান ভর বেড়েছে সেই পরিমান ভর শক্তিতে রুপান্তরিত হচ্ছে। অর্থাৎ ভর শক্তিতে রুপান্তরিত হচ্ছে। আর ভর আর শক্তির মধ্যে সেই সপম্পর্ক তা হলো ভর থেকে যে পরিমান শক্তি পাওয়া যাবে তা বের করতে ভরের পরিমান কে আলোর বেগের বর্গ দ্বারা গুন করতে হবে। প্রাপ্ত সমীকরনটা এবার যেকোনো ভরের শক্তিতে রুপান্তরিত হওয়ার ক্ষেত্রে ব্যবহার করতে পারি। অর্থাৎ যেকোন পরিমান ভর m থেকে প্রাপ্ত শক্তির জন্য লিখতে পারি $E = mc^2$

যেকোনো স্থির ভর যদি বেগে চলমান হয় তাহলে স্থির ভর m_0 আর থাকবে না ভর হবে $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

এই ভর থেকে প্রাপ্ত শক্তির জন্য অনুসারে লিখতে পারি, $E = mc^2$

এখন বস্তু যদি স্থির হয় তাহলে এর বেগ $v = 0$ তখন এর মধ্যে সঞ্চিত শক্তির পরিমানটা বের করা যাক

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

উক্ত রাশিকে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিসৃত করে পাই,

$$(1-v^2/c^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots$$

$$E = mc^2$$

$$= m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right)c^2$$

$$E = m_0c^2 + m_0\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \ldots$$

যখন যখন বস্তুটি স্থির তখন $v = 0$ বসালে ছাড়া বিসৃতির সব গুলো পদ শূন্যে পরিনত হয় তাই

$$=> E = m_0c^2$$

$$E_0(Rest\ Energy) = m_0c^2$$

একে নিশ্চল শক্তি বলা হয় এবং E_0 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মোট শক্তি যদি হয় $TE\ (Total\ Energy)$ তাহলে, মোট শক্তি(TE) = স্থির ভর শক্তি(RE) + গতিশক্তি(KE)

$$TE = Rest\ Energy + Kynetic\ Energy$$

$$=> E = m_0c^2 + KE$$

$$=> E = m_0c^2 + mc^2 - m_0c^2$$

$$=> E = mc^2$$

ধান ভানতে শিবের গীত অনেক হয়েছে। আর নয় [এই অংশটুকু আমার ‘‘আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব’’ বইয়ের অংশ]

একটুখানি অসীম ধারা

তোমরা কি জানো বিভিন্ন ফাংশনকে অসীম ধারায় প্রকাশ করা যায়। হয়তো শুনে থাকবে শ্রীনিবাস রামানুজন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত গুলোকে ত্রিভূজের বাহুর অনুপাত হিসেবে না শিখে শিখেছিলেন অসীম ধারা হিসেবে। কিছু ফাংশন এমন আছে যাদের অসীম ধারায় প্রকাশ করা যায়। কোনো ফাংশনকে অসীম ধারায় প্রকাশ করা যেতে হলে সেই ফাংশনের কিছু যোগ্যতা থাকতে হয়। ফাংশনটি যদি $\mathrm{f(x)}$ হয় তাহলে যোগ্যতা গুলো হলোঃ

(1) $\mathrm{f(x)}$ কে অসীম সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করা সম্ভব

(2)$f^{i}(0), f^{ii}(0), f^{iii}(0), f^{iv}(0), \dots$ এদের প্রত্যেকের মান শূণ্য হতে পারবে না। পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে যে ফাংশন পাওয়া যাবে তাতে ০ বসানোর ফলে সবগুলো মান শূণ্য হতে পারবে না। এই বিষয়টা পরে আরো ক্লিয়ার করবো। আপাতত দরকার নেই।

অনেকেই ভাবছো আমি এখন টেলর ধারা বা ম্যাকলরিনের ধারা শেখাবো কিন্তু না এতো সহজে এতো সুন্দর জিনিস আমি শেখাচ্ছি না। ফাংশনকে অসীম ধারায় প্রকাশ করার জন্য আমাদের নিত্য প্রয়োজনীয় কিছু আইডিয়াই যথেষ্ট।

বোঝার জন্য দ্বিপদী বিস্তৃতি একটু পকেটে রাখতে হবে।

আমরা জানি,$(x+a)^n$ এই আকারের একটা বিস্তৃতিতে n+1 সংখ্যক পদ থাকে,যদি n একটা ধণাত্বক পূর্নসংখ্যা হয়।যখনই n এর মান ধণাত্বক পূর্নসংখ্যা ছাড়া অন্যকিছু হয়ে যায় তখনই এই কথা মিথ্যা হয়ে যায়,বিস্তৃতির পদ সংখ্যা হয়ে যায় অসীম!! পাওয়া যায় একটা অসীম ধারা৷

সৌভাগ্যবশত $(x+a)^n$ আকারের দ্বিপদী বিস্তৃতিতে n এর মান যাইহোক বিস্তৃত করা একদম পানির মতো সহজ

$$(x+a)^n = x^n + \frac{nx^{n-1}a}{1!} + \frac{n(n-1)x^{n-2}a^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}a^3}{3!} \dots$$

এই একটা সূত্র জানা থাকলে n আর a এর যেকোনো মানের জন্য একটা ফাংশনকে অসীম ধারায় বিস্তৃত করা কোনো ব্যাপার না!

আমরা দুই একটা উদাহরন দিয়ে দেখাই,

$(x+a)^n$ আকারের বিস্তৃতে a=1 বসালে,

$$(x+1)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^n$$

এবার n এর বিভিন্ন মানের জন্য কয়েকটি অসীম ধারার বিস্তৃতি নিচের মতো করে সহজেই বের করে ফেলতে পারো,

$$(x+1)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1!}x + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

আবার,

$$(1-x)^{-1} = 1 - \frac{(-1)}{1!}(-x) + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}(-x)^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}(-x)^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

একই উপায়ে,

$$(1-x)^{-2} = 1 + \frac{(-2)}{1!}(-x) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2 + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}(-x)^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2.3}{2!}x^2 + \frac{2.3.4}{1.2.3}x^3 + \cdots = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

একই ভাবে আরো সংখ্য ফাংশনকে অসীম ধারায় বিস্তৃত করে ফেলতে পারো মুহূর্তেই...

বিশেষ ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ন ফাংশনের জন্য অসীম ধারা বের করতে কাজে লাগবে এমন দুই একটা অসীম ধারা বের করে দেখালাম

$$(1+x^2)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1!}x^2 + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}(x^2)^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}(x^2)^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

আর এই ধারাটা,

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1!}(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-x^2)^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{x^4}{2!} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \times \frac{(-x^6)}{3!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{15x^6}{48} + \cdots$$

অনেক অনেক আগে বইয়ের প্রায় শুরুতে e^x কি জিনিস কিভাবে আসে এর বিস্তৃতি সব শিখিয়েছি। এখন শুধু বিস্তৃতি দিয়ে দিলাম,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

x এর যেকোনো মানের জন্য এই ধারা খাটে এমনকি x যদি জটিল সংখ্যা হয় তাও!

জটিল সংখ্যা নামটা অনেকের কাছে অপরিচিত মনে হতে পারে। অল্প একটু পরিচয় করিয়ে দেই। আমরা জানি ঋণাত্বক সংখ্যার বর্গমূল বের করা যায় না। যেমনঃ$\sqrt{-16} = \sqrt{4 \times 4 \times (-1)}$ কে আমরা এইভাবে লিখতে পারি বর্গমূলের মধ্যে 4×4 এটা কিন্তু সঙ্গায়িত বর্গমূল করে দুইটা 4 এর বদলে একটা লিখলেই হলো সমস্যা শুধু $\sqrt{-1}$ কে নিয়ে। এজন্য $\sqrt{-1}$ কে কাল্পনিক সংখ্যা বা ইমাজিনারি নাম্বার হিসেবে ধরা হয় এবং $\sqrt{-1} = i$ হিসেবে লিখা হয়। এই নিয়ম অনুসরন করে

$$\sqrt{-16} = 4\sqrt{-1} = 4i$$

আমরা এমন একটা সংখ্যা পেয়েছি যেটার মধ্যে চেনা পরিচিত 4 আছে আবার অবাস্তব i আছে এইযে বাস্তব আর অবাস্তব সংখ্যা মিশিয়ে যে সংখ্যা তৈরী হলো সেটাকেই জটিল সংখ্যা বলে হয়ে থাকে,এব্যাপারে অনেক অনেক আলোচনা আছে। আসলে অবাস্তব সংখ্যার আলোচনা ক্যালকুলাসের বাইরে রাখা ঠিক না। কিন্তু আপাতত এইটুকুতেই সন্তুষ্ট থাকো। এই নিয়ে বড়-সর একটা আর্টিকেল পূর্নাঙ্গ বইয়ের জন্য তুলে রাখা আছে!

যাইহোক যেহেতু $\sqrt{-1} = i$

$$\boxed{\begin{gathered} i^2 = -1 \\ i^3 = i^2 i = -i \\ i^4 = i^3 i = -i.i = -(-1) = 1 \end{gathered}}$$

আপাতত এইটুকু জানলেই চলবে।

এবার শেখাবো বিখ্যাত অয়লারের সূত্র

$$e^{ix} = isinx + cosx$$

এই সুত্রের প্রমাণটা ক্যালকুলাস ব্যবহার করে অতিসহজেই করা যায়।এখানে দেখালাম না আপাতত মেনে নাও। আমি জানি আমার উপরে অনেকেই রেগে যাচ্ছো কিন্তু সোনাও যদি ফ্রিতে দেয়া হয় তাহলে দাম কমে যায়। এজন্যই ফ্রি ইবুকে এতো কিছু দিলাম না।

e^{ix} কে বিস্তৃত করলে দাঁড়ায়

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} \ldots$$

$$\Rightarrow isinx + cosx = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \ldots$$

$$\Rightarrow isinx + cosx = i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) + (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots)$$

সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করলেই পাওয়া যাবে,

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

এই ধারা গুলো সত্যিই ঠিক কিনা জানতে x এর মান বসিয়ে যাচাই করে নাও। তবে মান অবশ্যই রেডিয়ানে বসাবে। কেউ ডিগ্রিতে বসিয়ে মিলছে না! মিলছে না! বলে চিল্লাবা না।

এবার যদি বলি sin(5x) , cos(7x) এই ফাংশন গুলোকে অসীম ধারায় বিস্তৃত করে দেখাও তাহলে কঠিন কিছু।

এবার একটুখানি ইন্ট্রিগেশন থেকে অনেক কয়েকটি বিশেষ ফাংশনের জন্য অসীম ধারা বের করে দেখাবো।

এখন ইন্ট্রিগেশনের যে মান গুলো ব্যবহার করছি সেগুলো ইতিপূর্বে আলোচনা করে এসেছি,

$$\int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)$$

$\frac{1}{1+x}$ এর জন্য অসীম ধারা একটু আগেই বের করে রেখেছি

$$\frac{1}{(x+1)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

এবার এই ধারার উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ করে লিখতে পারি,

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)\, dx$$

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = \int dx - \int x dx + \int x^2 dx - \int x^3 dx + \cdots$$

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

এই ধারায় $x = 1$ বসালে $\ln 2$ এর মানের জন্য অসীম ধারা পাওয়া যাবে এবং সেটা হবে,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

একইভাবে $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ এই ধারাটিকে ইন্ট্রিগেশন করে লিখতে পারি

$$\int \frac{dx}{1-x} = \int (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)\, dx$$

$$\Longrightarrow -\ln(1-x) = \int dx + \int x dx + \int x^2 dx + \int x^3 dx + \cdots$$

$$\Longrightarrow -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\Longrightarrow \ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

আবার $\tan^{-1}(x)$ কে অসীম ধারায় বিস্তৃত করতে চাও সেই উপায় ও আছে

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ এই ধারাটিকে ইন্ট্রিগেশন করলেই $\tan^{-1}(x)$ এর অসীম ধারা পাওয়া যাবে। এভাবে,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots) dx$$

$$\Longrightarrow \tan^{-1}(x) = \int dx - \int x^2 dx + \int x^4\, dx - \int x^6\, dx + \cdots$$

$$\Longrightarrow \tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

জানো $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$. যদি $\tan^{-1}(x)$ এর অসীম ধারায় $x = 1$ বসিয়ে দেয়া যায় তাহলে পাওয়া যাবে $\frac{\pi}{4}$! এ এক মহান জিনিস পাই এর মান নির্নয়ের একটা অসীম ধারা পাওয়া যাবে। ধারাটা এইরকম

$$\tan^{-1}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

এমন আর দুই একটা দেখানো যাকঃ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{15x^6}{48} + \cdots$$

এই সমীকরণটির উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে ইন্ট্রিগেশন করলে পাওয়া যাবে

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{15x^6}{48} + \cdots\right) dx$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}(x) = \int dx + \int \frac{x^2}{2} dx + \int \frac{3x^4}{8} dx + \int \frac{15x^6}{48} dx + \cdots$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{32} + \frac{15x^7}{336} + \cdots$$

এখান থেকেও পাইয়ের মানের জন্য একটা অসীম ধারা বের করা যায়,

$$\sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$\sin^{-1}(x)$ এর অসীম ধারায় $x = 1$ বসিয়ে দিলে পাই,

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{32} + \frac{15}{336} + \cdots$$

এ পর্যন্ত ম্যাকলরিন বা টেলর উপপাদ্য ছাড়াই অনেক গুলো অসীম ধারা বের করতে শিখিয়ে দিলাম। এই বইতে আর না। বাকি আলোচনা পরে হবে।

এই বইতে ক্যালকুলাসের সাথে সম্পর্কিত আরো যেসব বিষয় বাদ পরে গেল সেগুলো তালিকা বেশ লম্বাঃ

- ডিফাররেন্সিয়েশনের সমস্ত ট্রিক
- লিমিট নিয়ে অনেক কথা
- ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের বিস্তৃতি
- কাল্পনিক সংখ্যা
- আংশিক ব্যবকলন
- ভেক্টর ক্যালকুলাসঃকার্ল,ডাইভারজেন্স
- হাইপারবোলিক ফাংশনের ক্যালকুলাস
- ক্যালকুলাসের উচ্চতর ব্যবহার
- *অনেক বিষয়ের গভীর আলোচনা*
- L.Hipital's Rule
- *কয়েকজন বিজ্ঞানীর নামে সুন্দর সুন্দর থিওরেম*
- পাওয়ার সিরিজঃটেলর ধারা ও ম্যাকলরিনের ধারা
- ফাংশনের ম্যাক্সিমা,মিনিমা
- গড়মান উপপাদ্য,মধ্যমান উপপাদ্য
- ডিফারেন্সিয়াল ইকুয়েশন
- পরামিতিক সমীকরণ
- কনিক সমূহের অনেক কাহিনী
- বিভিন্ন চেনা আকার আকৃতির বস্তুর ক্ষেত্রফল নির্নয়
- ইন্ট্রিগেশনের শ'খানেক এর বেশি পদ্ধতি
- উচ্চতর ইন্ট্রিগেশন
- সেকেন্ড অর্ডার ডিফারেন্সিয়াল ইকুয়েশন

  আসলে এতো বিষয় আছে যে এই পাতাটা লিখার পক্ষে খুবই ছোট। যাইহোক এই বিষয় গুলো এই বইয়ের প্রিন্টেড ভার্সনে পেতে চাইলে আমার এই বইটার রিভিউ দিতে হবে ,আর আমাকে বই বের করার জন্য সাপোর্ট দিতে হবে। আমি আরো ভালোভাবে পড়াশোনা করে তোমাদের বোঝানোর চেষ্টা জন্য চেষ্টারত।

উন্মুক্ত হোক ফেইসবুকে বিজ্ঞান চর্চার দুনিয়া

যোগদিন অসাধারণ সব মানুষদের সাথে

ফেইসবুক গ্রুপ **ব্যাঙের ছাতার বিজ্ঞান**

এবং

একটুখানি ফিজিকস এর মাধ্যমে

পরিশিষ্ট

এই অংশ টুকু দিবো কিনা বার বার ভাবছিলাম শেষে ইবুক পাবলিশ করার মাত্র আধা ঘন্টা আগে মনে হলো দেয়া যায়। এখানে কোনো ব্যাখ্যামূলক কথা নেই শুধু আছে কিছু সূত্রের সংগ্রহ। অনেক পাঠক আছেন যাদের এক সাথে অনেক সূত্রের সংগ্রহ দেখলে ভালো লাগে আবার অনেকেই বিরক্ত হবেন। এই সূত্র গুলো নিজে লিখার সময় পাইনি তাই সহস্র গাণিতীক সূত্র নামক বইটির পৃষ্ঠার ছবি দিয়েছি।

পরিশিষ্ট-১

ত্রিকোণমিতিক সূত্রাবলীঃ

$Sin(A+B) = SinACosB + CosASinB \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$Sin(A-B) = SinACosB - CosASinB \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i)+(ii) => Sin(A+B) + Sin(A-B) = 2SinACosB$

$SinC + SinD = 2Sin\left(\frac{C+D}{2}\right)Cos\left(\frac{C-D}{2}\right) \qquad [By\ getting\ \ A+B = C\ and\ \ A-B = D]$

$(i)-(ii) => Sin(A+B) - Sin(A-B) = 2CosASinB$

$SinC - SinD = 2Cos\left(\frac{C+D}{2}\right)Sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$

$Cos(A+B) = CosACosB - SinASinB \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$Cos(A-B) = CosACosB + SinASinB \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i)+(ii) => Cos(A+B) + Cos(A-B) = 2CosACosB$

$CosC + CosD = 2Cos\left(\frac{C+D}{2}\right)Cos\left(\frac{C-D}{2}\right) \qquad [By\ getting\ \ A+B = C\ and\ \ A-B = D]$

$CosC - CosD = -2Sin\left(\frac{C+D}{2}\right)Sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$

Double Angle Formulas:

$Sin2x = 2SinxCosx$

$Cos2x = Cos^2x - Sin^2x = 1 - 2Sin^2x = 2Cos^2x - 1$

$Sin^2x = \frac{1 - Cos2x}{2}$

$Cos^2x = \frac{1 + Cos2x}{2}$

$Sin2x = 2SinxCosx$

$= 2\frac{Sinx}{Cosx}Cos^2x$

$\therefore Sin2x = \frac{2tanx}{1 + tan^2x}$

$We\ know, tan2x = \frac{Sin2x}{Cos2x}$

$\frac{2tanx}{1 - tan^2x} = \frac{2tanx}{Cos2x(1 + tan^2x)}$

$=> Cos2x = \frac{1 - tan^2x}{1 + tan^2x}$

পরিশিষ্ট-২

দ্বিপদী বিস্তৃতি

Row 0							1					
Row 1						1		1				
Row 2					1		2		1			
Row 3				1		3		3		1		
Row 4			1		4		6		4		1	
Row 5		1		5		10		10		5		1
Row 6	1		6		15		20		15		6	

Whole numbers: n, m
Real number: x
Combinations: ${}^{n}C_{m}$

$$(1+x)^{n} = 1 + {}^{n}C_{1}x + {}^{n}C_{2}x^{2} + \ldots + {}^{m}C_{n}x^{m} + \ldots + x^{n}$$

$${}^{n}C_{m} = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{m!}, \ |x| < 1.$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^{2} - x^{3} + \ldots, \ |x| < 1.$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^{2} + x^{3} + \ldots, \ |x| < 1.$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^{2}}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3x^{3}}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{4}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \ldots, \ |x| \le 1.$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{1\cdot 2x^{2}}{3\cdot 6} + \frac{1\cdot 2\cdot 5x^{3}}{3\cdot 6\cdot 9} - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8x^{4}}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} + \ldots, \ |x| \le 1.$$

পরিশিষ্ট-৩

বিভিন্ন ফাংশনের অন্তরকের টেবিলঃ

Independent variable: x
Real constants: C, a, b, c
Natural number: n

$$\frac{d}{dx}(C)=0$$

$$\frac{d}{dx}(x)=1$$

$$\frac{d}{dx}(ax+b)=a$$

$$\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)=ax+b$$

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-n})=-\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a},\ a>0,\ a\neq 1.$$

$$\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(u-v)}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(ku)}{dx}=k\frac{du}{dx}$$

Quotient Rule

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\frac{du}{dx}\cdot v-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Chain Rule

$y=f(g(x)),\ u=g(x),$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Derivative of Inverse Function

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

where $x(y)$ is the inverse function of

Reciprocal Rule

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

Logarithmic Differentiation

$y=f(x),\ \ln y=\ln f(x),$

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot\frac{d}{dx}[\ln f(x)].$$

$$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a,\ a>0,\ a\neq 1.$$

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\tan x\cdot\sec x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x)=-\cot x\cdot\csc x$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}$$

পরিশিষ্ট-৪

কিছু মৌলিক ফাংশনের যোগজের টেবিলঃ

Functions: f, g, u, v
Independent variables: x, t, ξ
Indefinite integral of a function: $\int f(x)dx$, $\int g(x)dx$,
Derivative of a function: $y'(x)$, $f'(x)$, $F'(x)$, …
Real constants: C, a, b, c, d, k
Natural numbers: m, n, i, j

Indefinite Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ if } F'(x) = f(x).$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

$$\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

Method of Substitution

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt \text{ if } x = u(t).$$

Integration by Parts

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

where $u(x)$, $v(x)$ are differentiable functions.

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$$

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - x + C$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \; n \neq -1.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C, \; a \neq b.$$

$$\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}\left(a+bx-a\ln|a+bx|\right) + C$$

$$\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln|a+bx|\right] + C$$

$$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{xdx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bx| + \frac{a}{a+bx}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C, \; ab > 0.$$

Some Definate Intregals

$$\int_a^b 1dx = b - a$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ for } a < c < b.$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left|\frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}\right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$